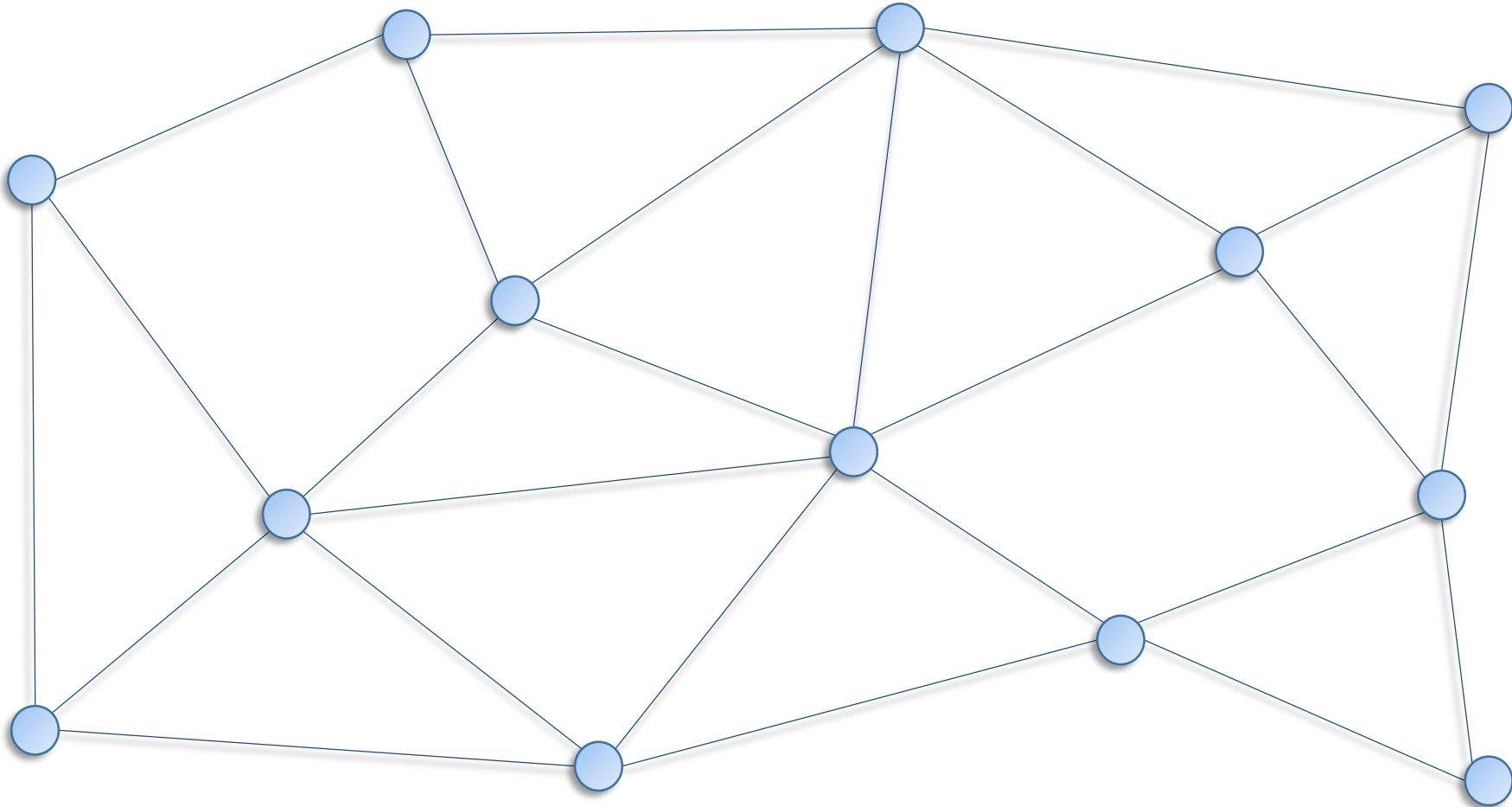


The background of the slide features a complex network graph visualization. It consists of numerous nodes, represented by circles of varying sizes and shades of blue, interconnected by a dense web of thin, light blue lines. The nodes are distributed across the frame, with some clusters being more densely connected than others, creating a sense of depth and complexity. The overall aesthetic is technical and modern, typical of data science or computer science presentations.

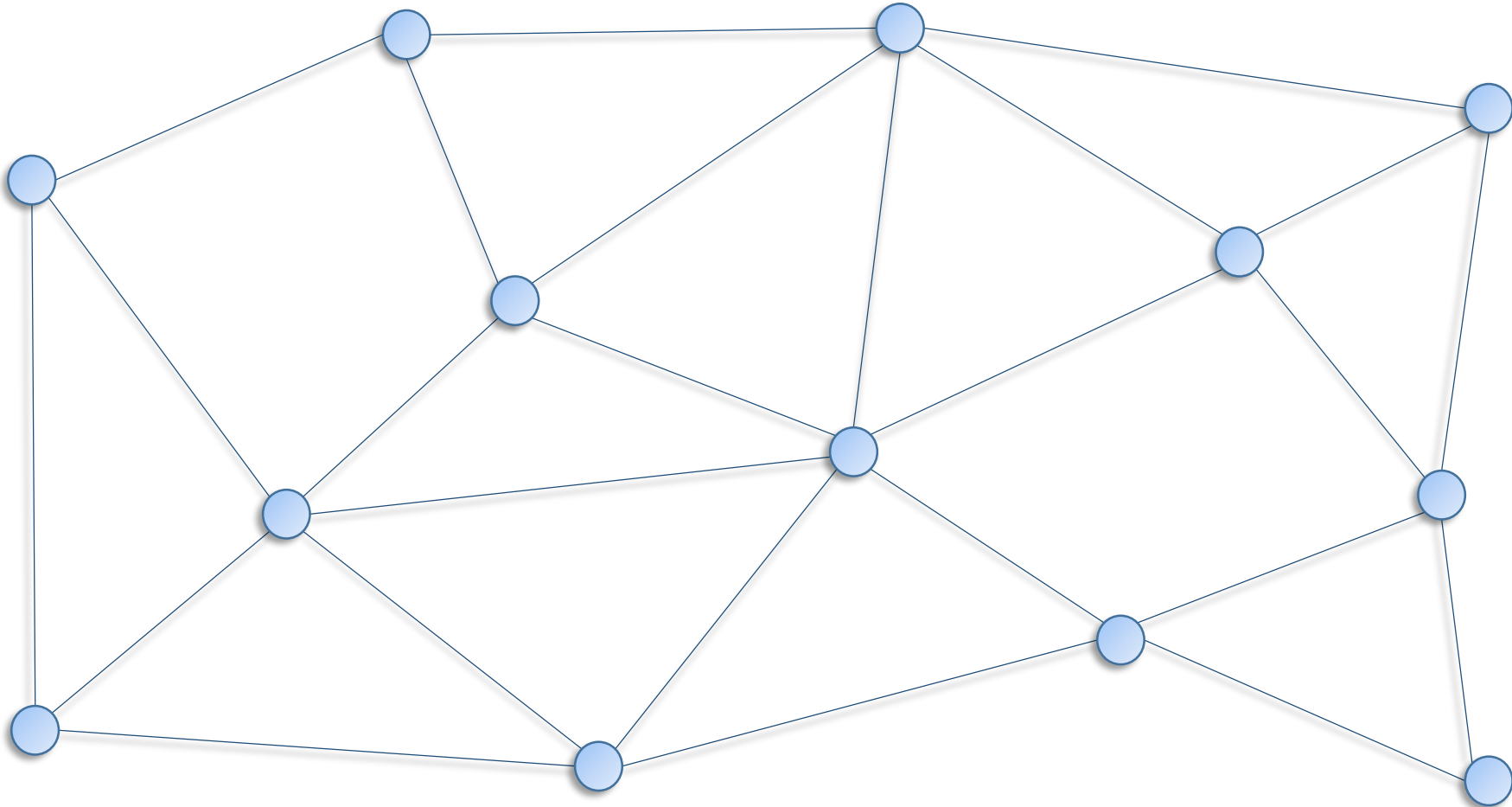
Modelos Matemáticos para Redes Sociais

Fábio Protti
Instituto de Computação
Universidade Federal Fluminense

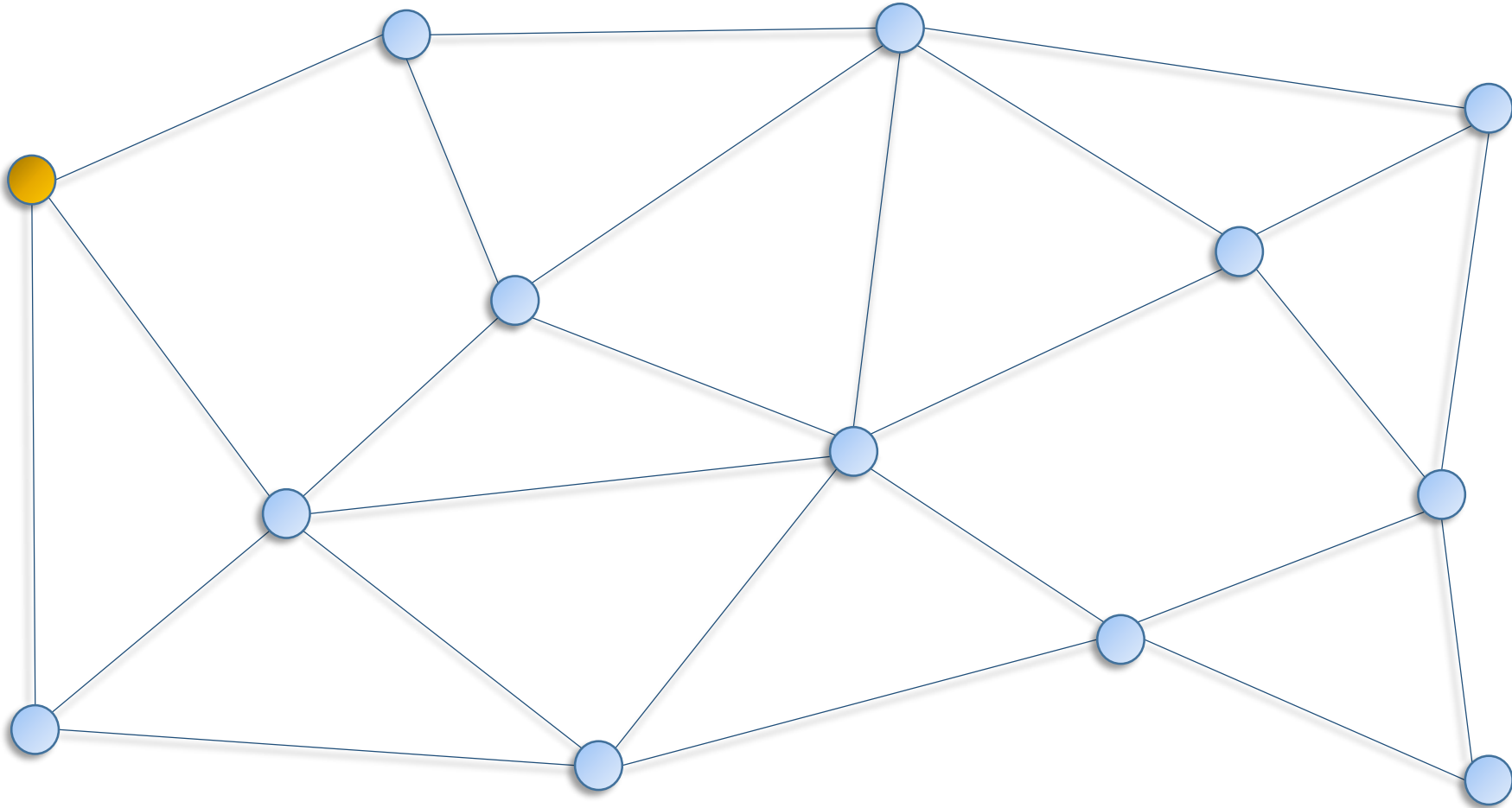
Rede social modelada por um grafo



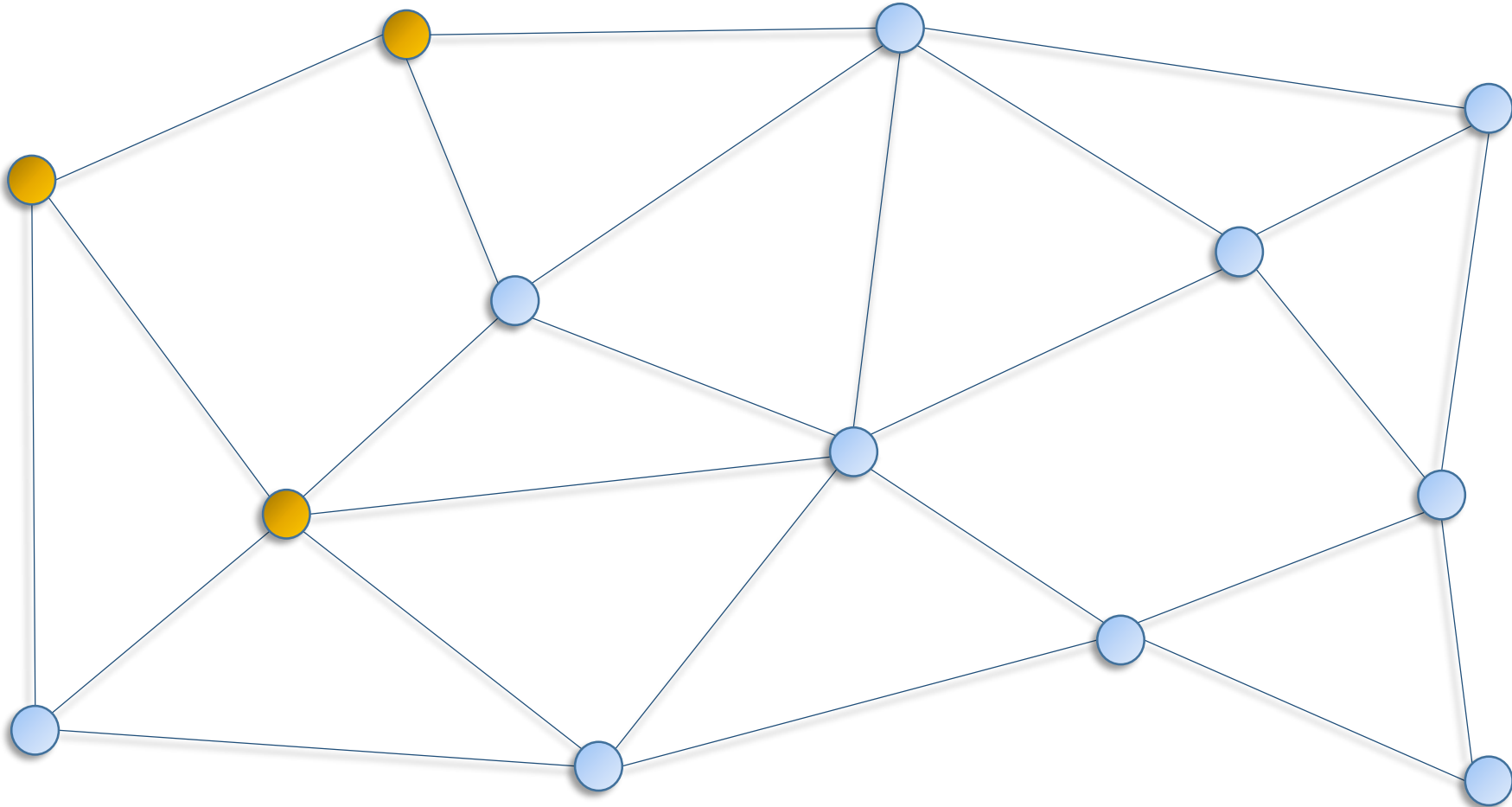
Propagação de informação na rede



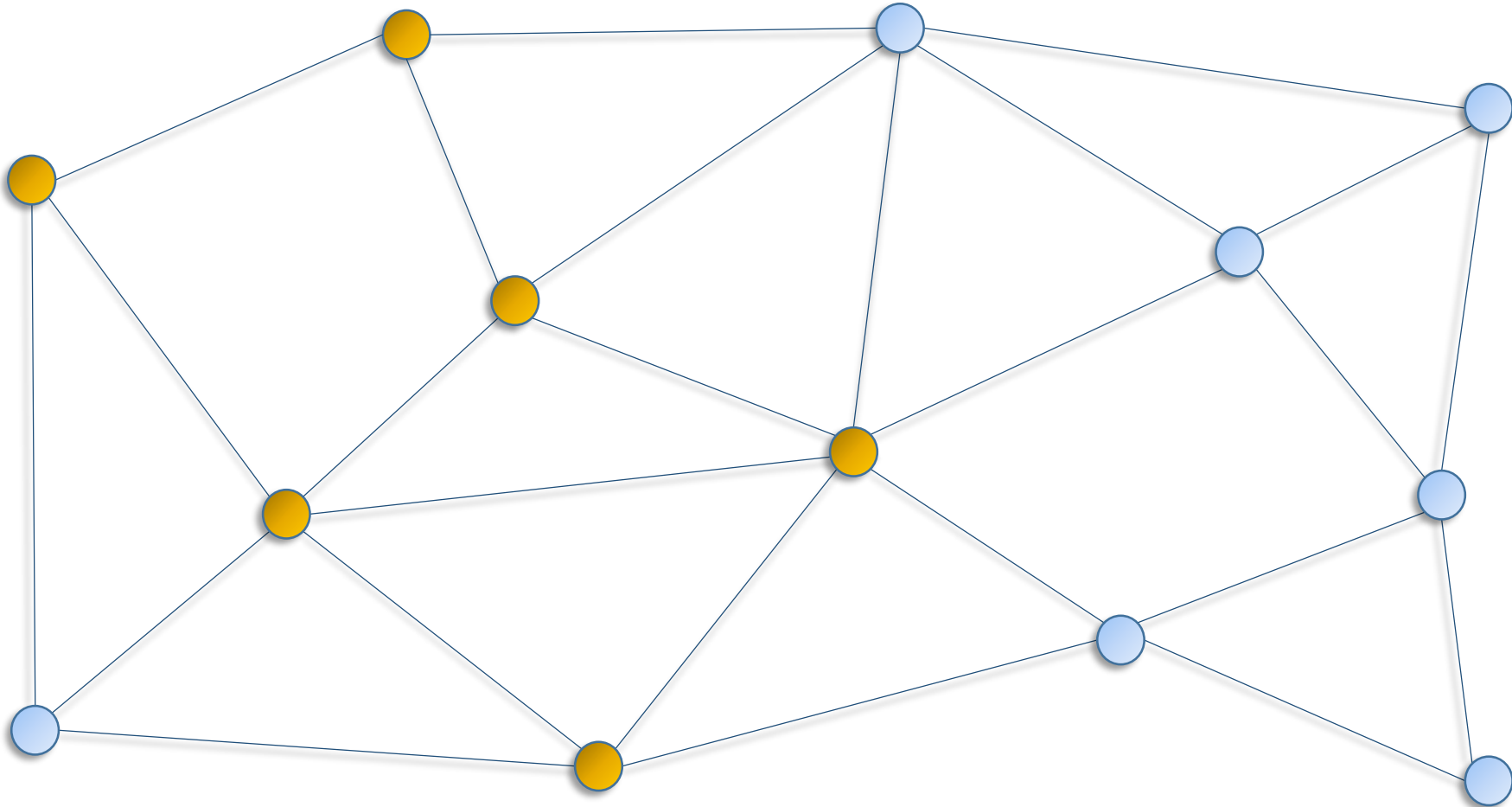
Propagação de informação na rede



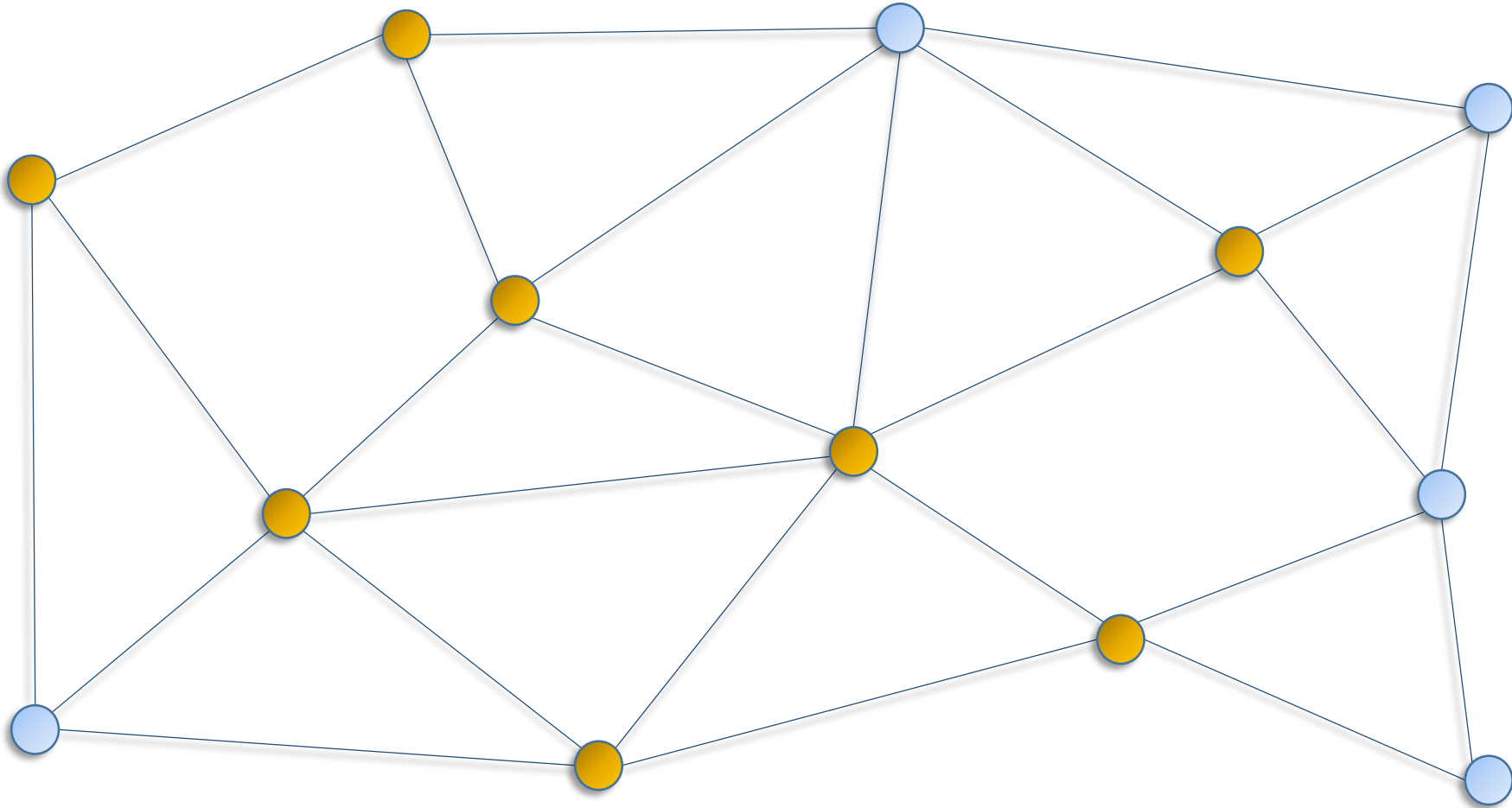
Propagação de informação na rede



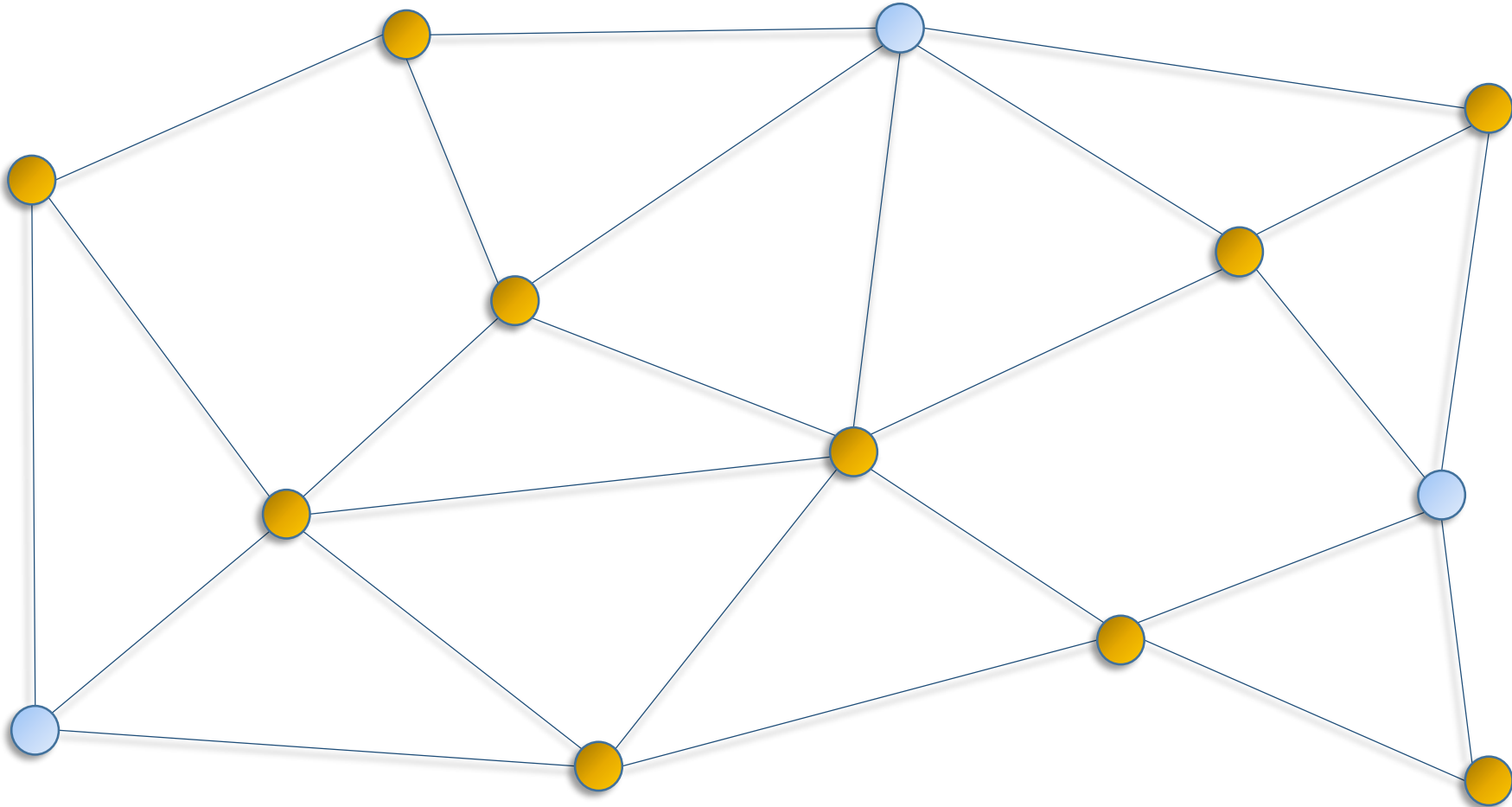
Propagação de informação na rede



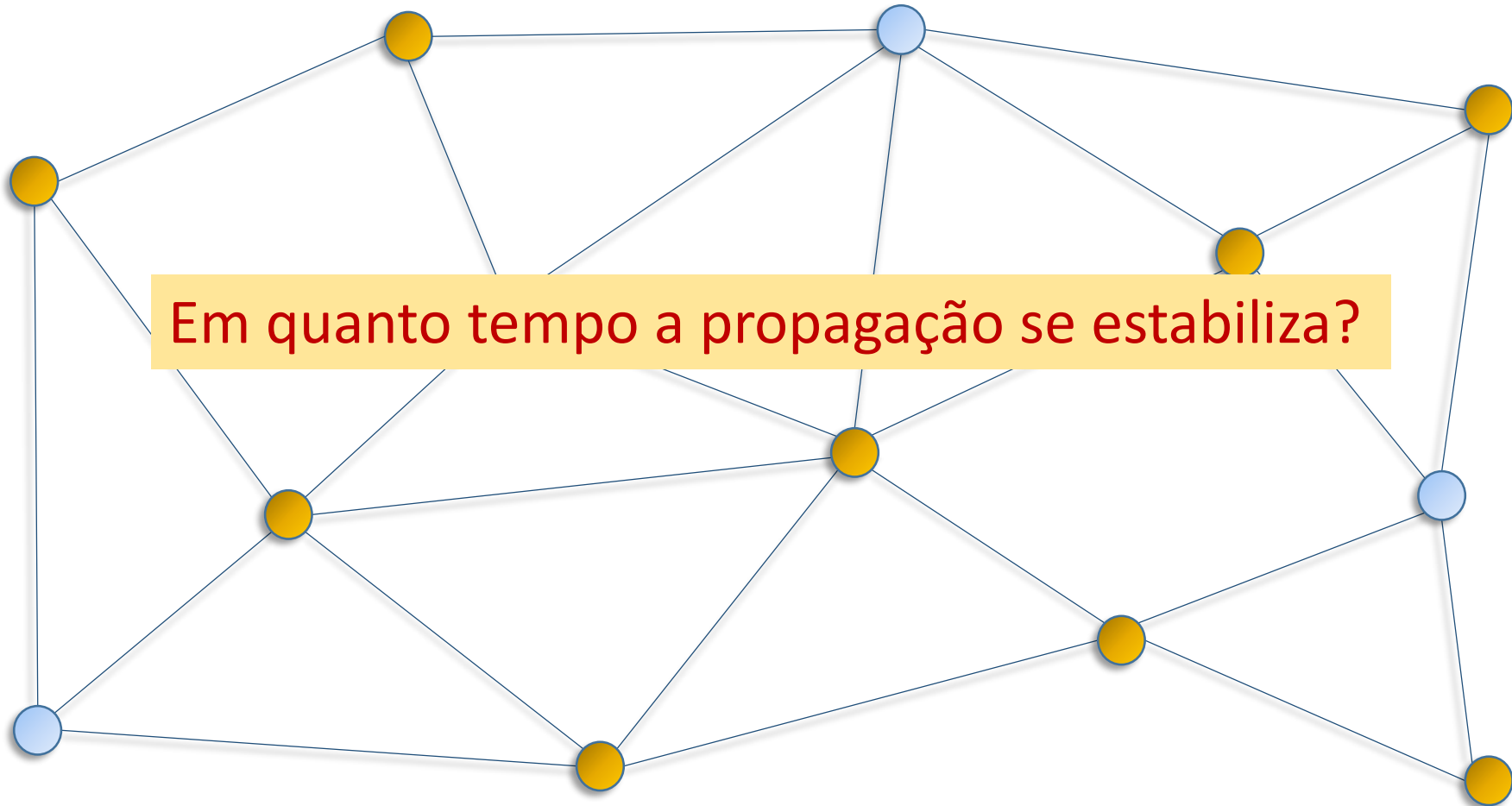
Propagação de informação na rede



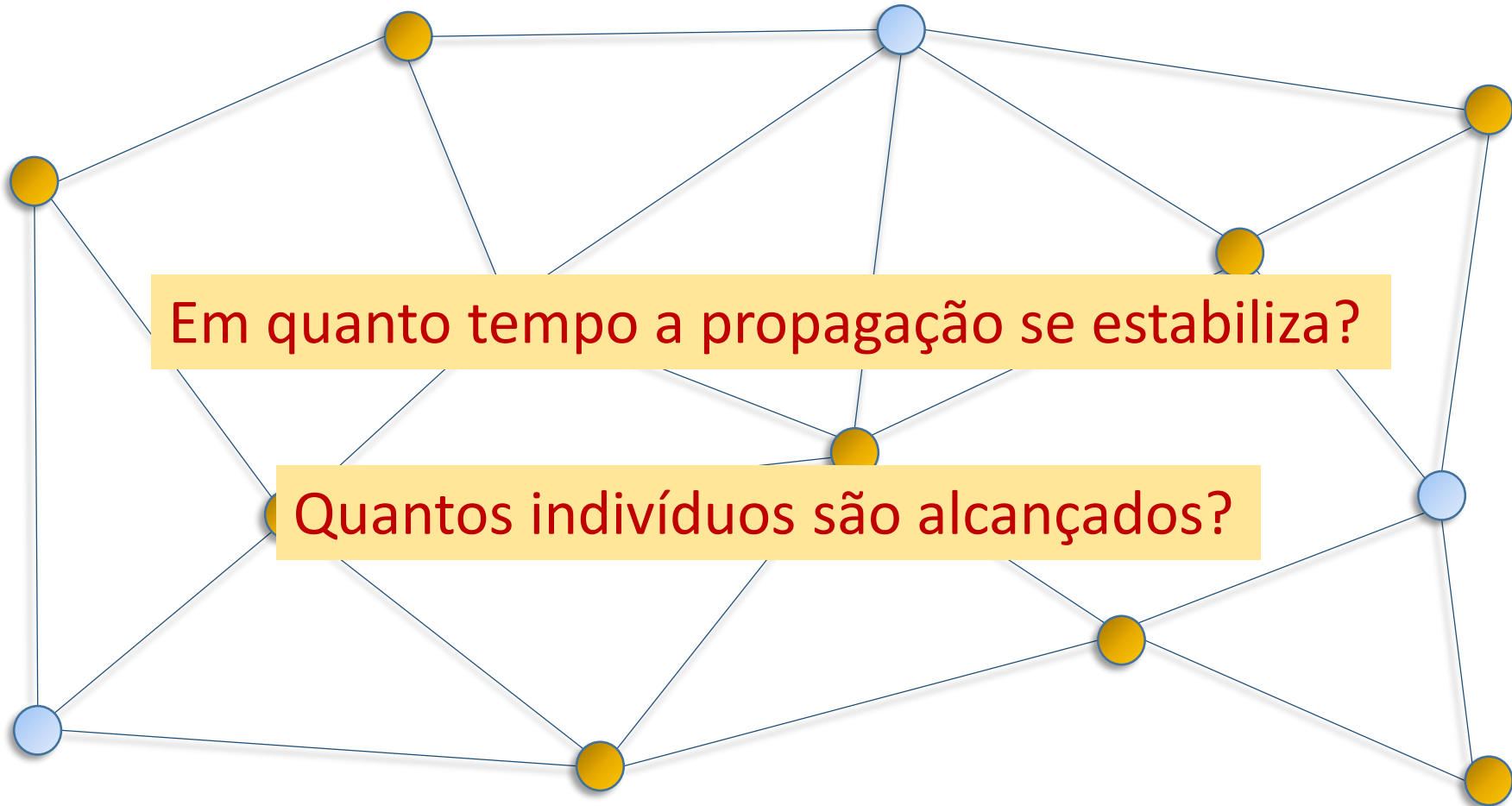
Propagação de informação na rede



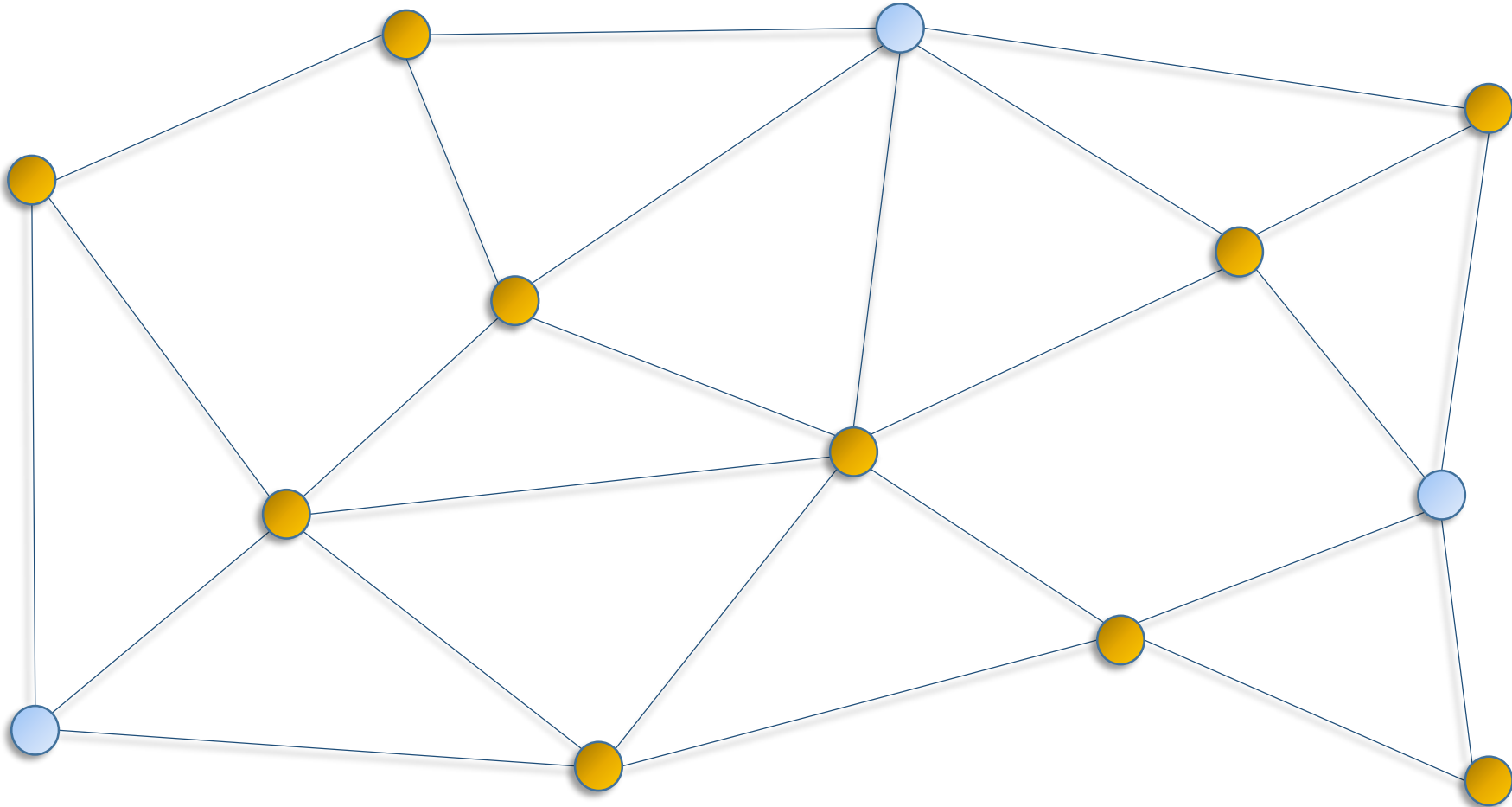
Propagação de informação na rede



Propagação de informação na rede

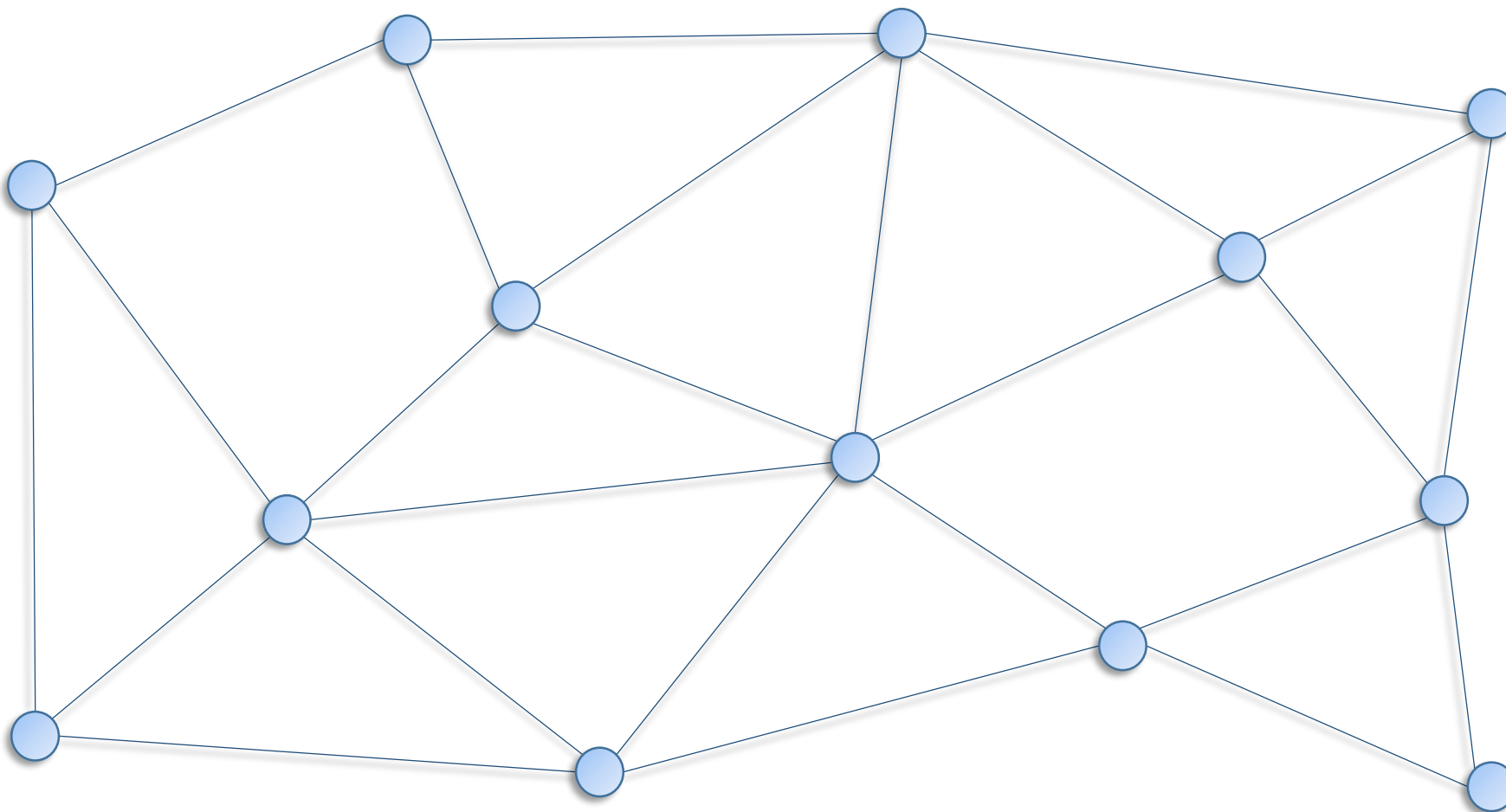


Propagação de informação na rede

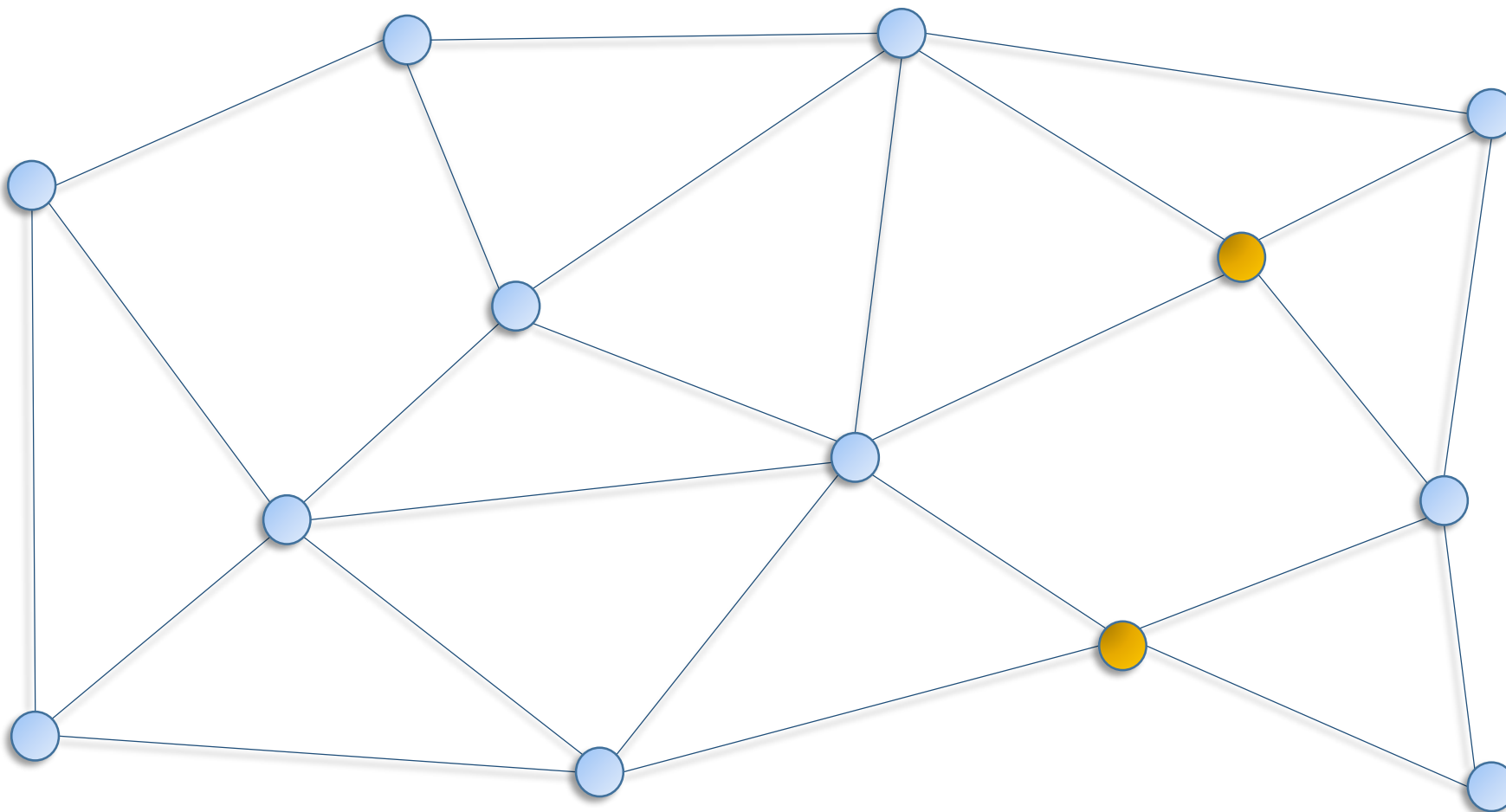


Este modelo também pode ser aplicado para estudos de contaminação

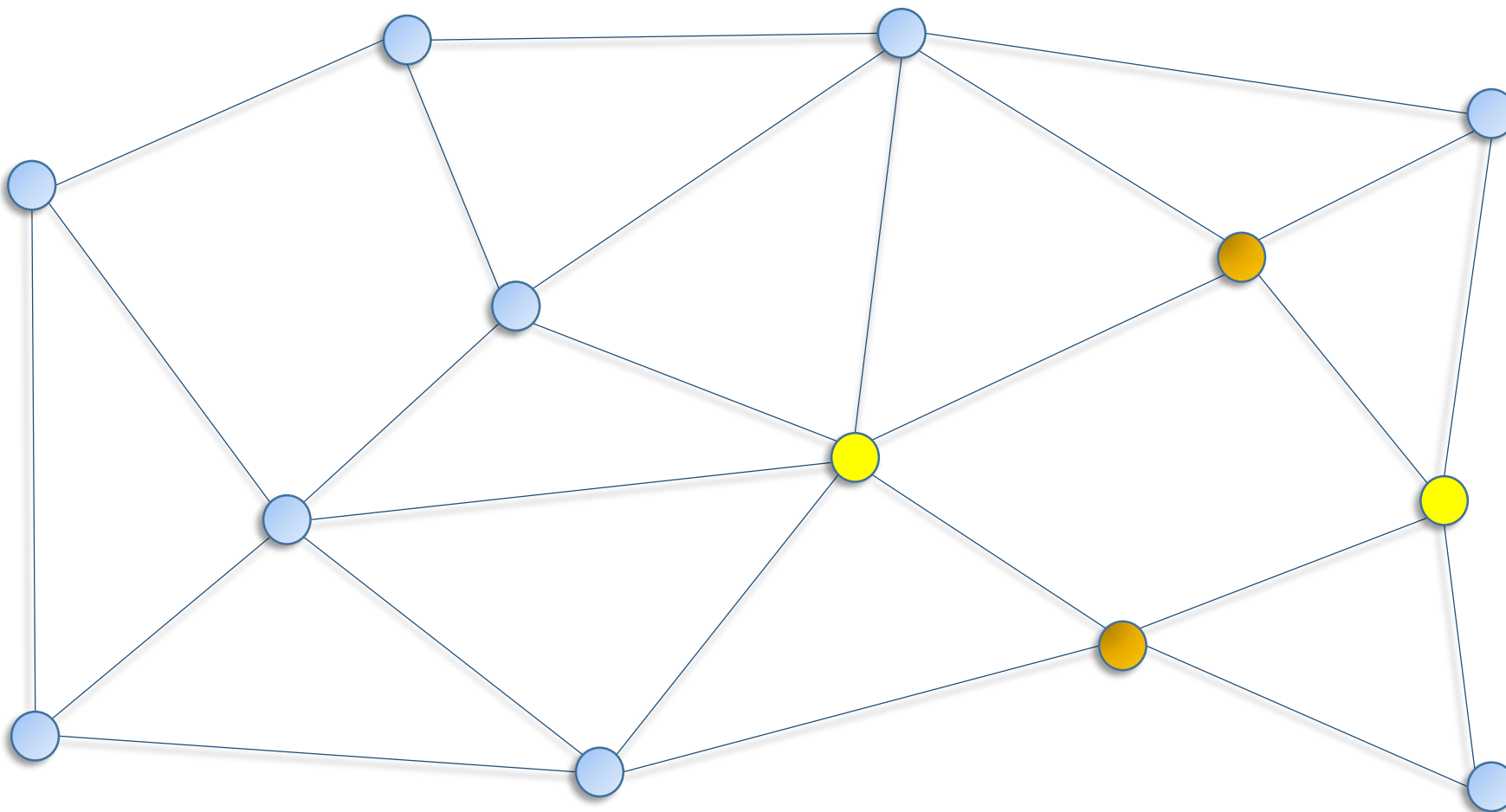
Disseminação de opinião



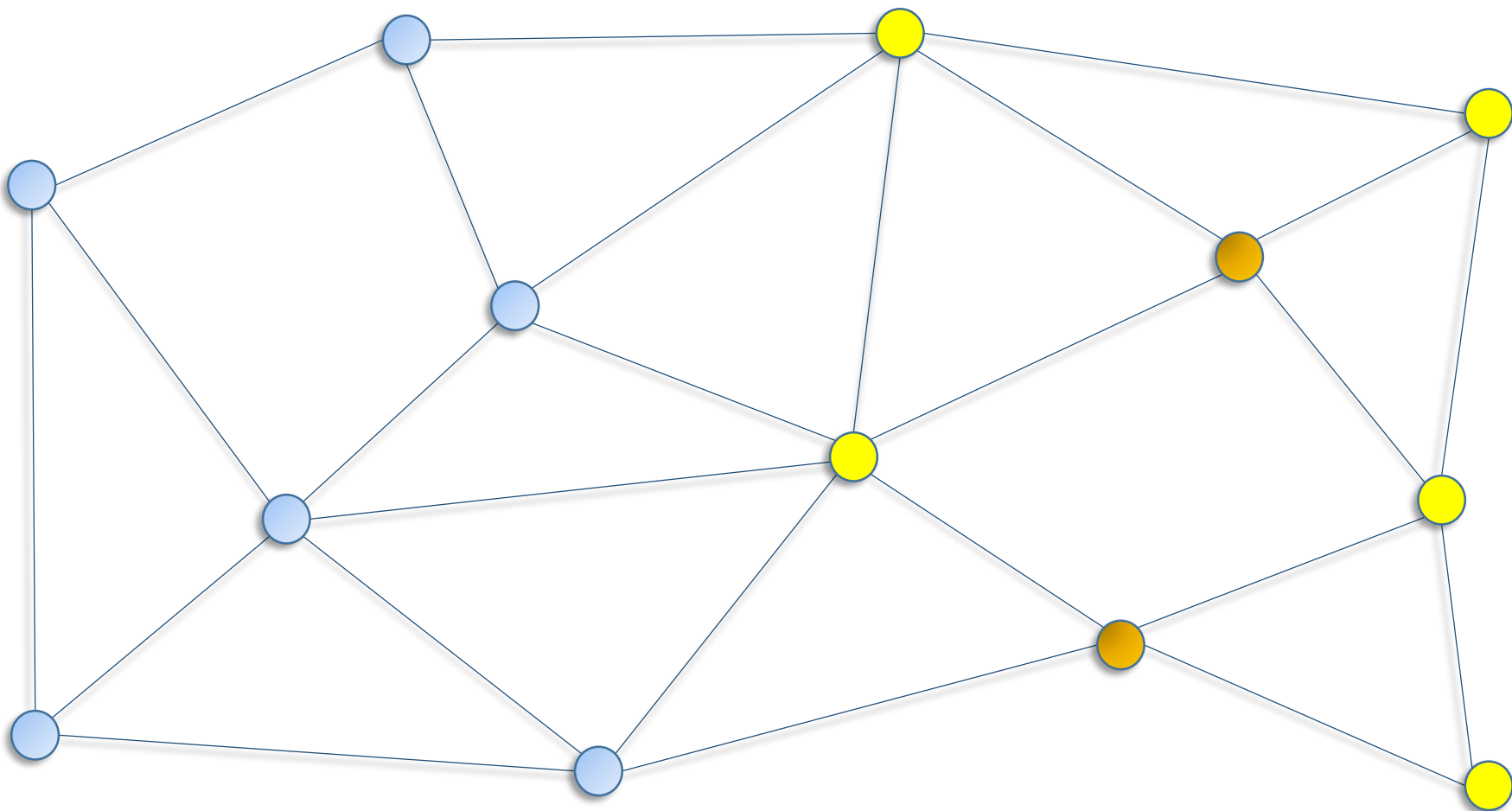
Disseminação de opinião



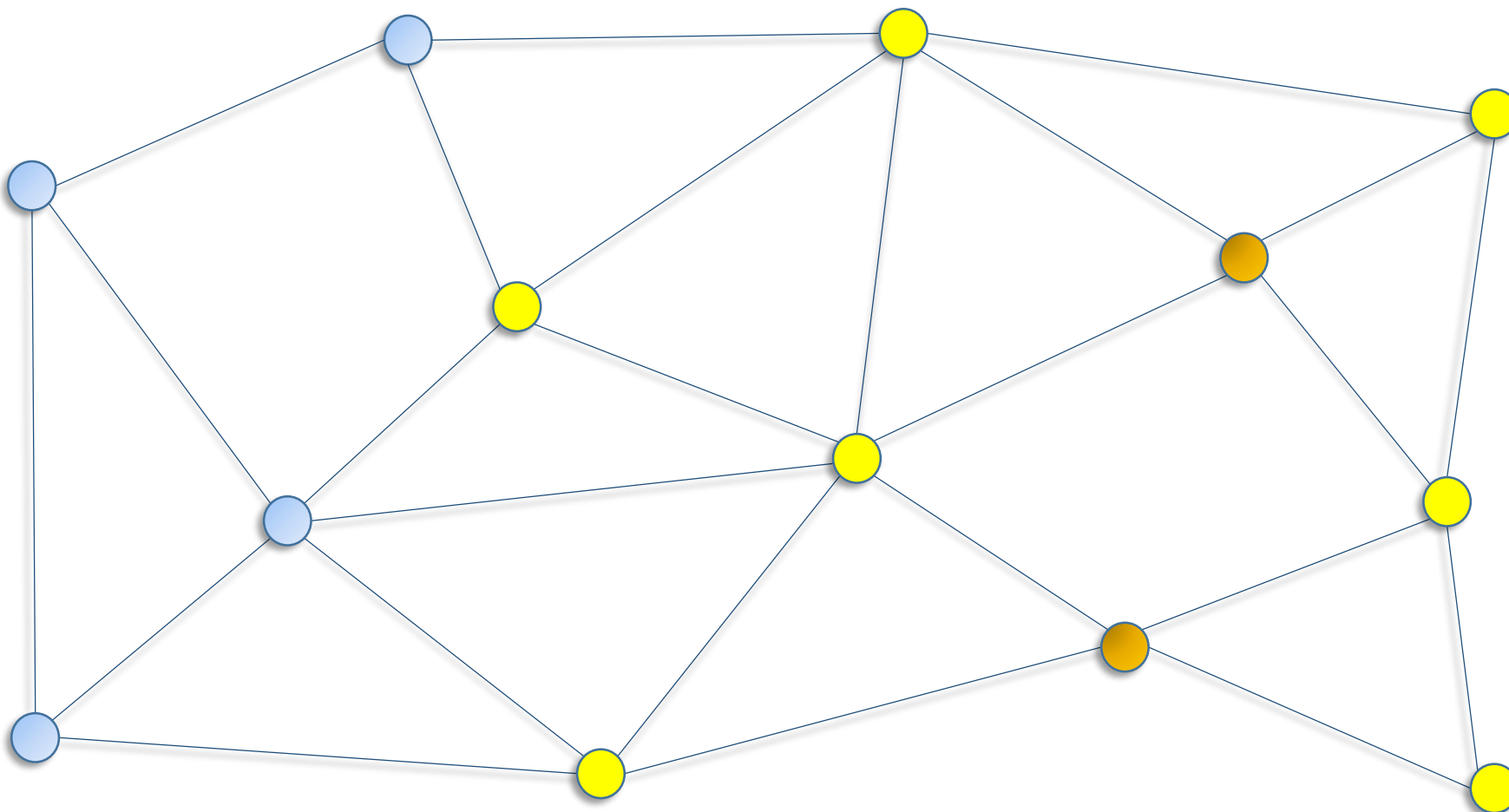
Disseminação de opinião



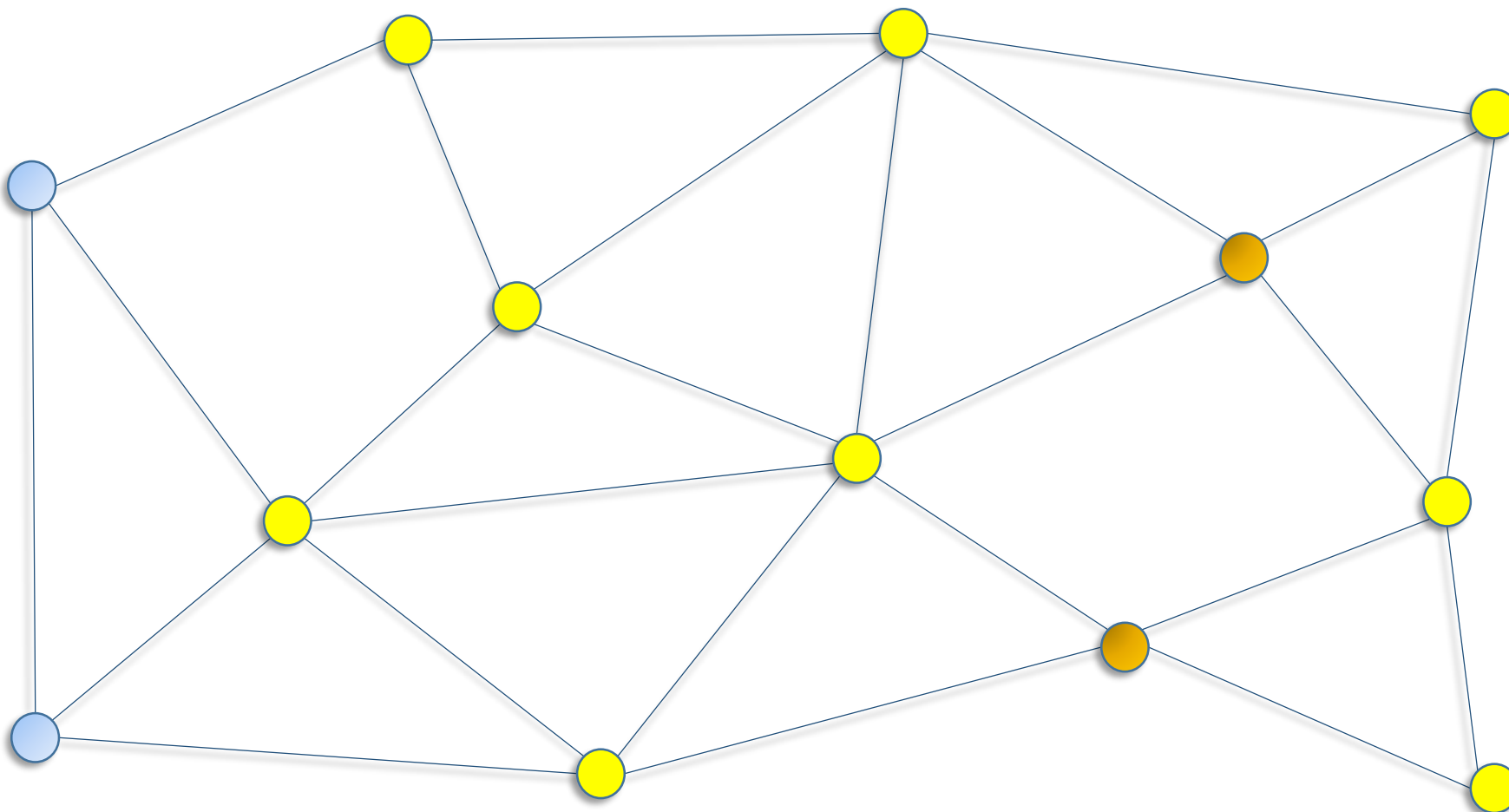
Disseminação de opinião



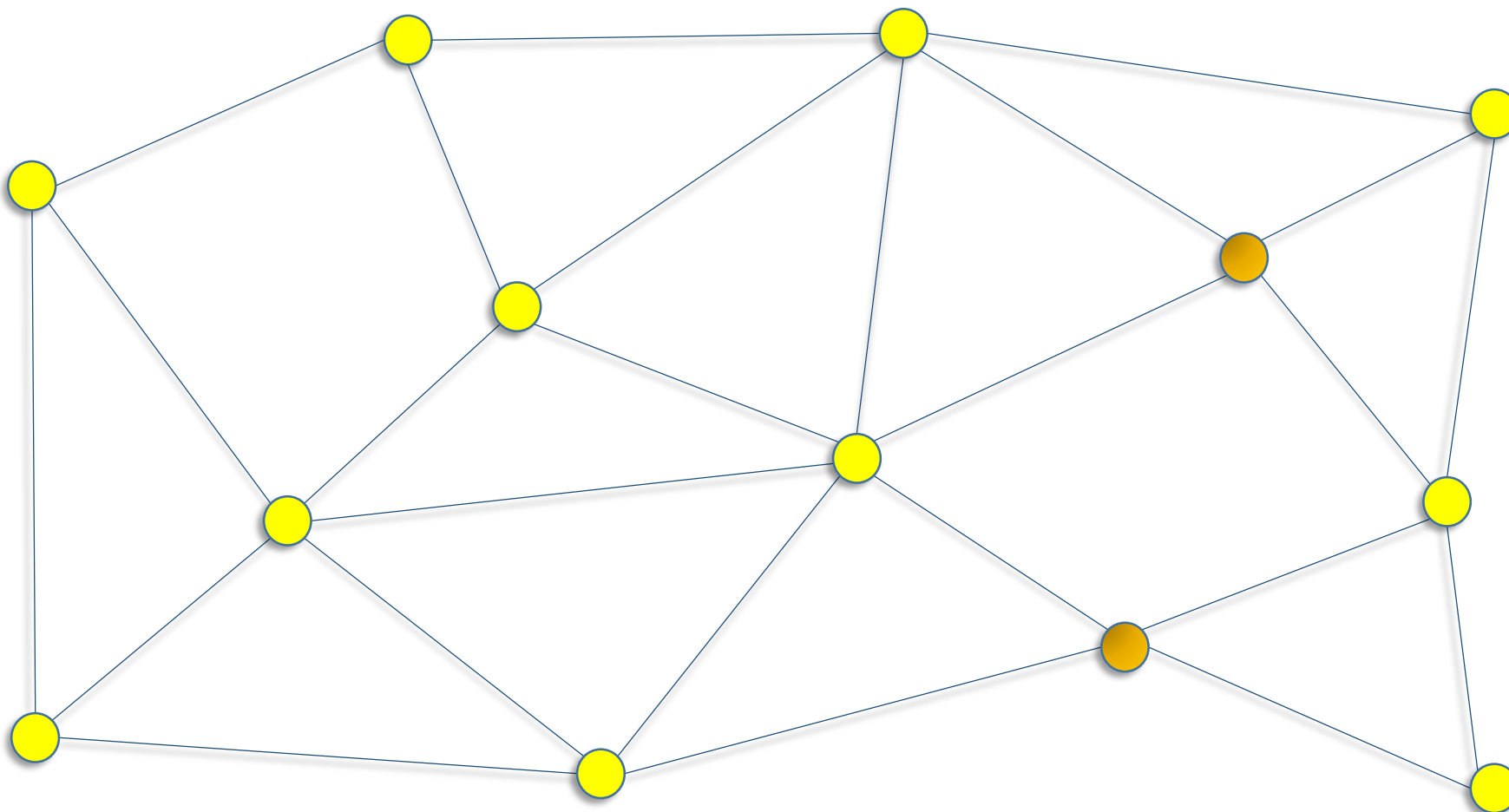
Disseminação de opinião



Disseminação de opinião



Disseminação de opinião

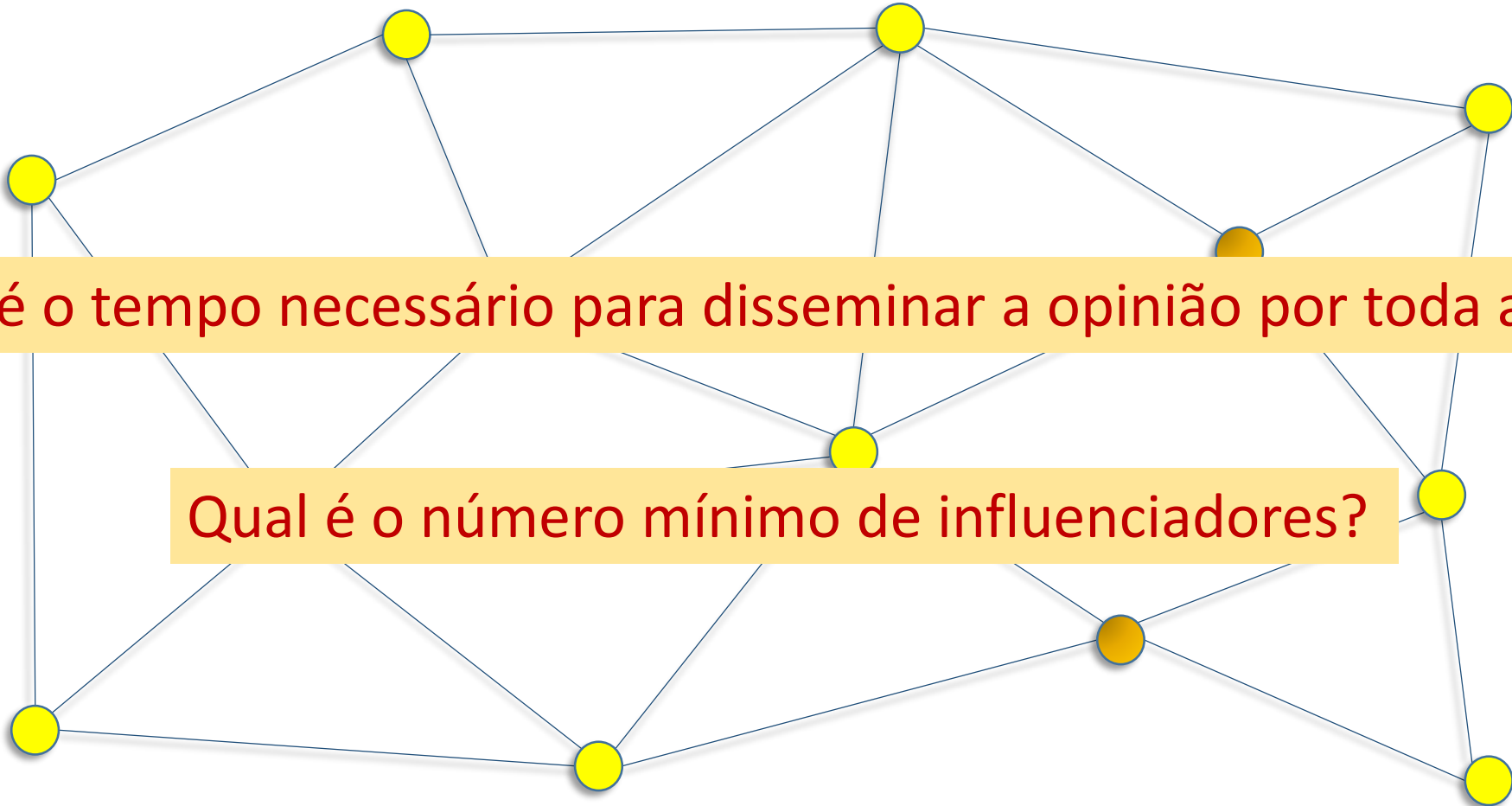


Disseminação de opinião

Qual é o tempo necessário para disseminar a opinião por toda a rede?



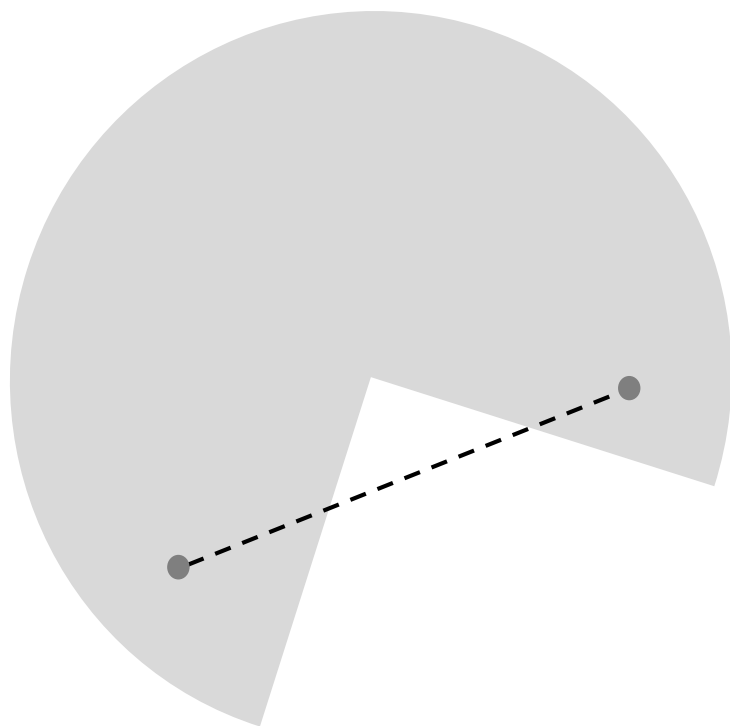
Disseminação de opinião



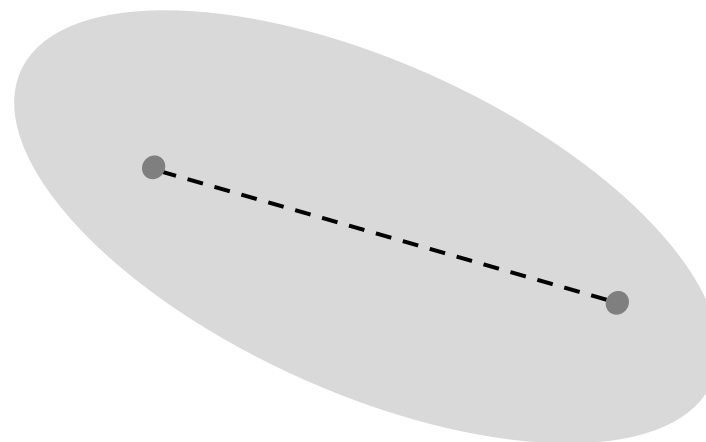
Qual é o tempo necessário para disseminar a opinião por toda a rede?

Qual é o número mínimo de influenciadores?

Convexidade

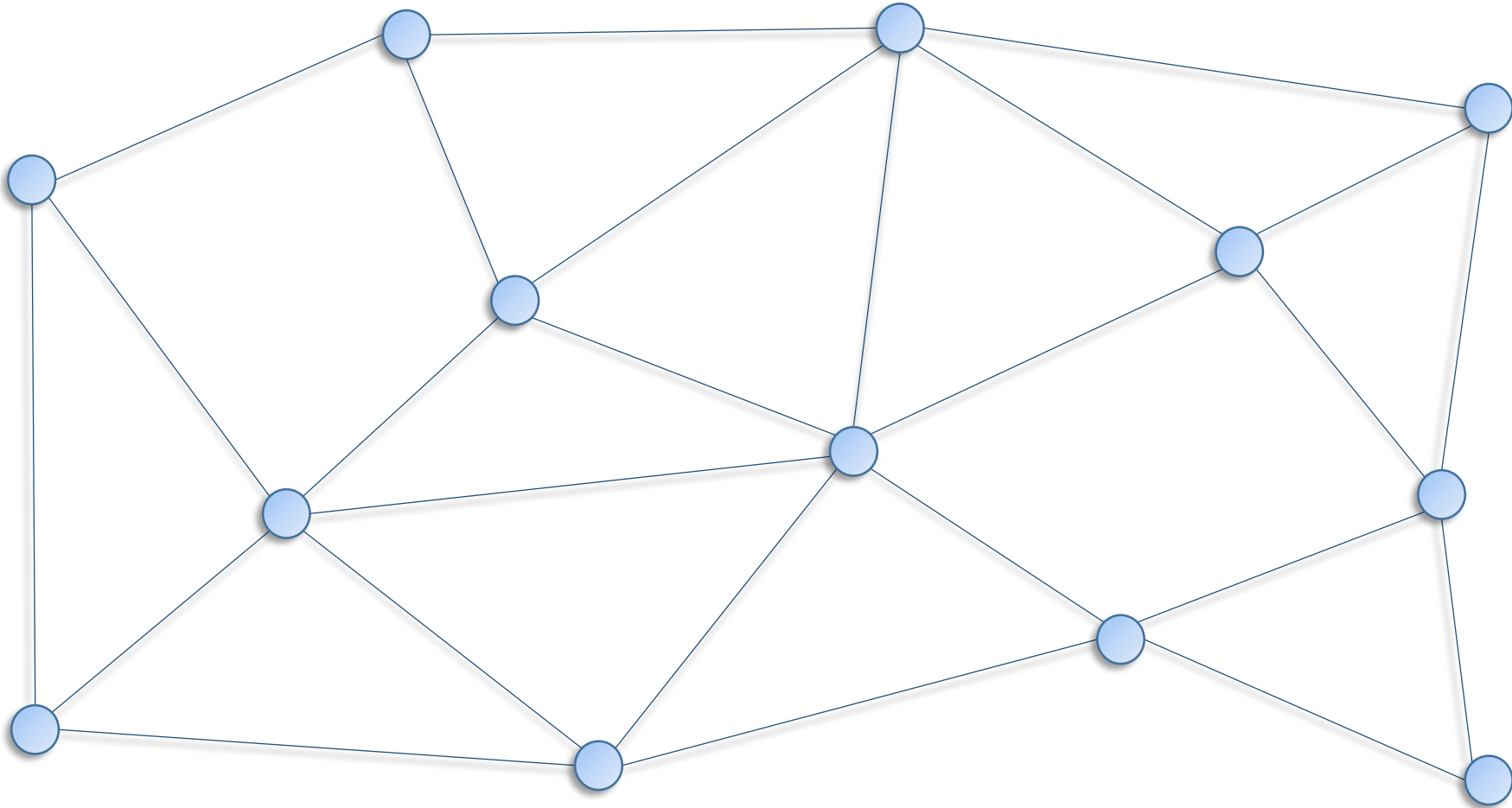


região não convexa

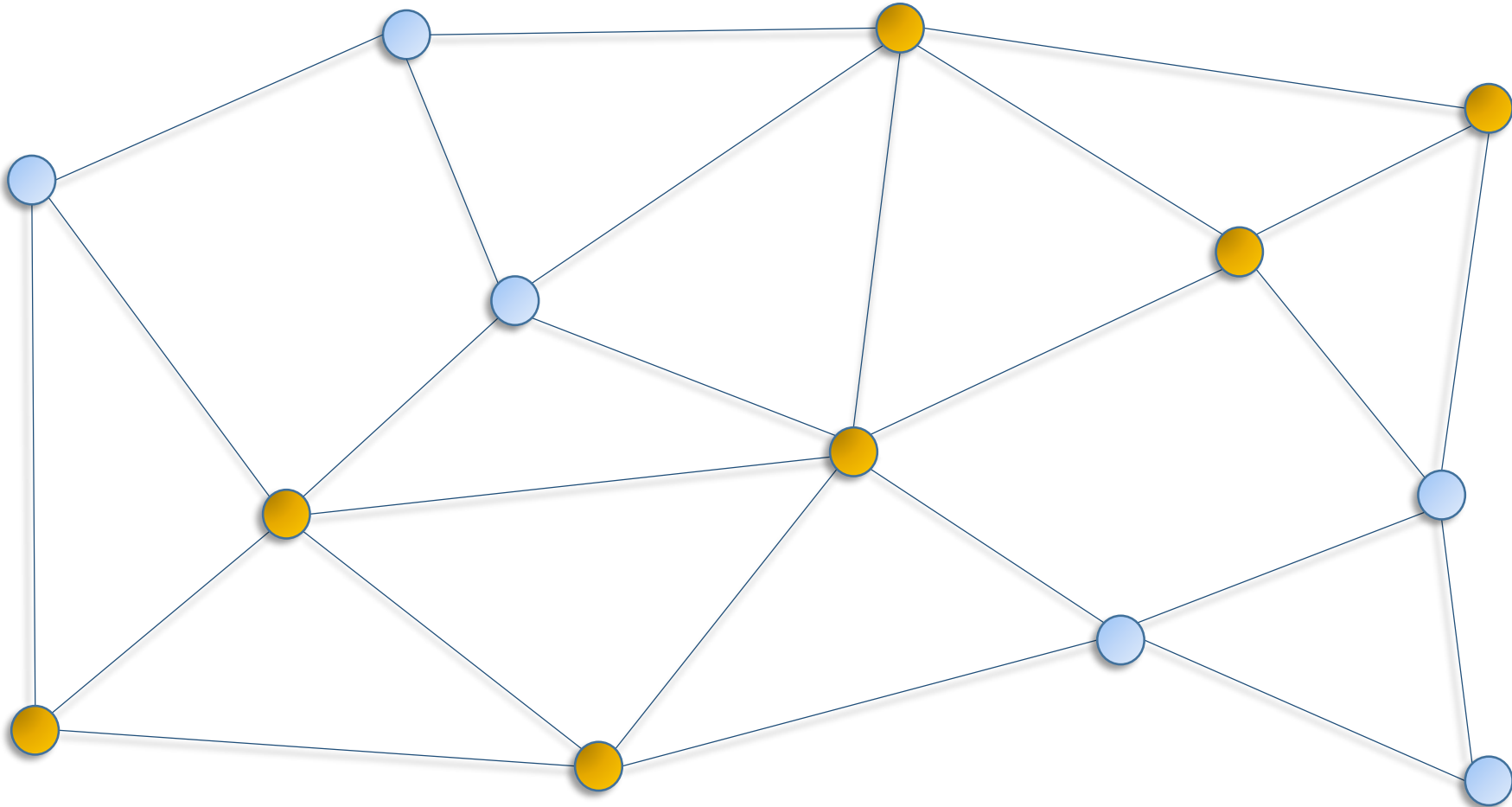


região convexa

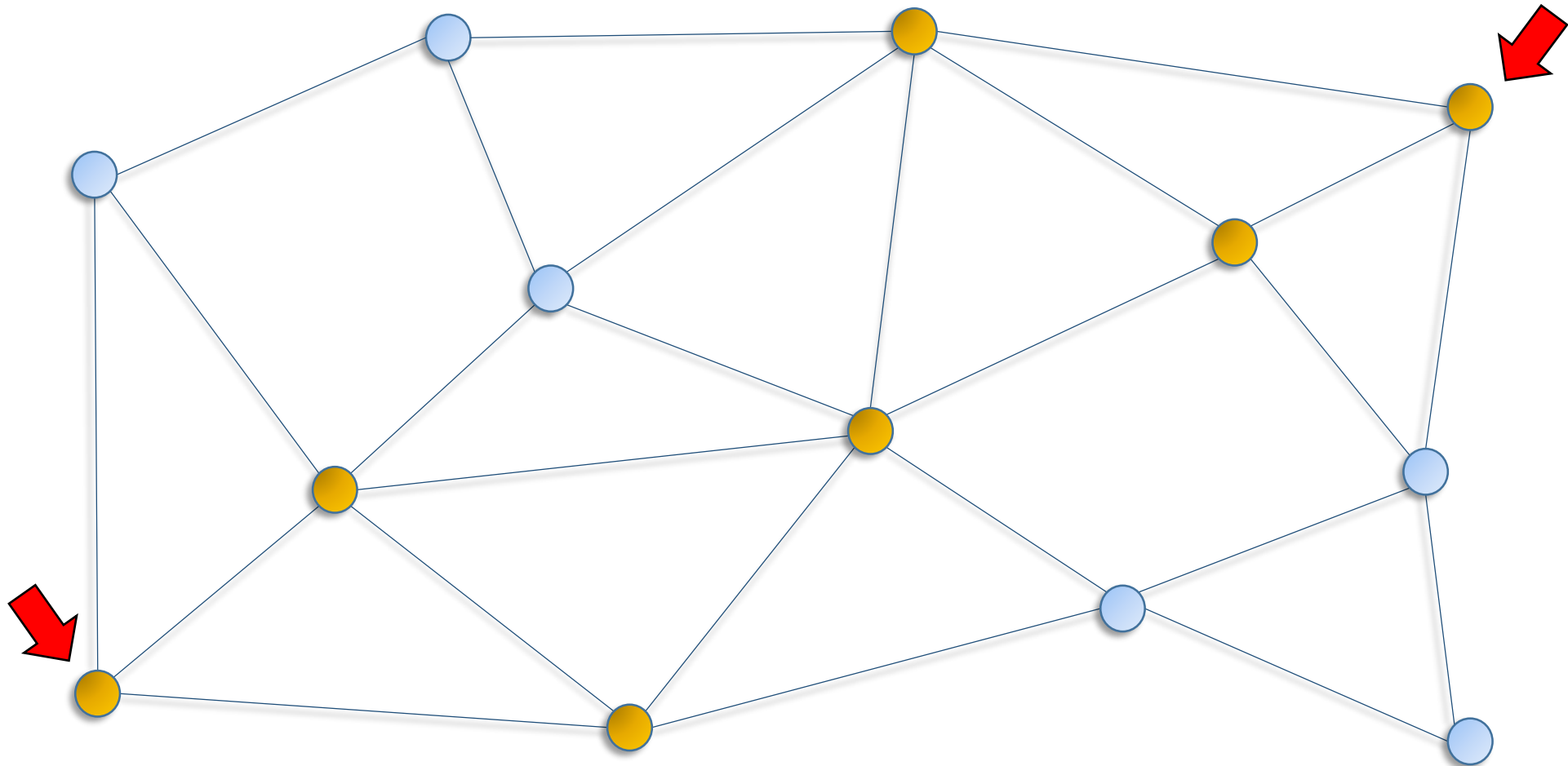
Convexidade geodética em grafos



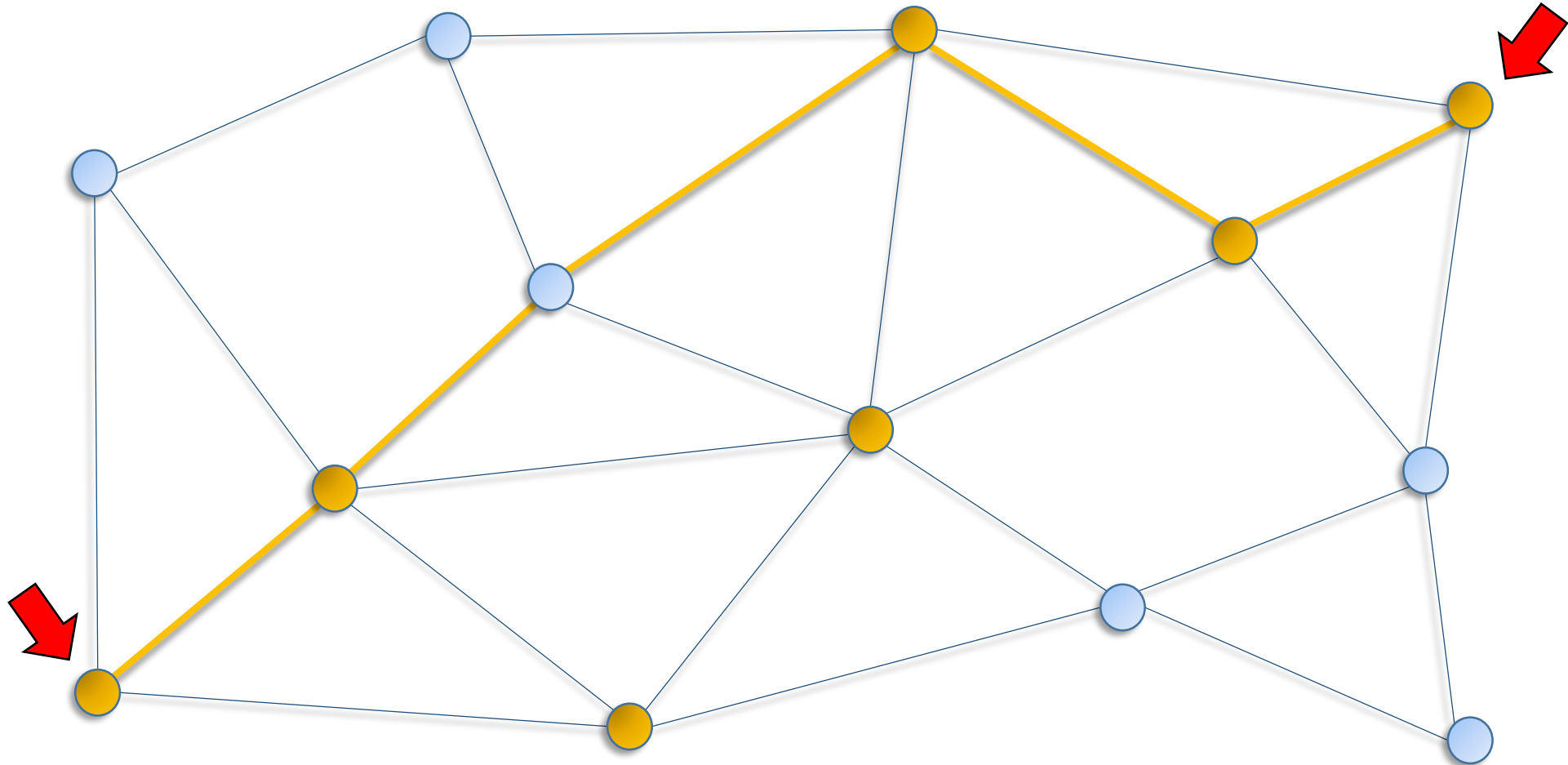
Convexidade geodética em grafos



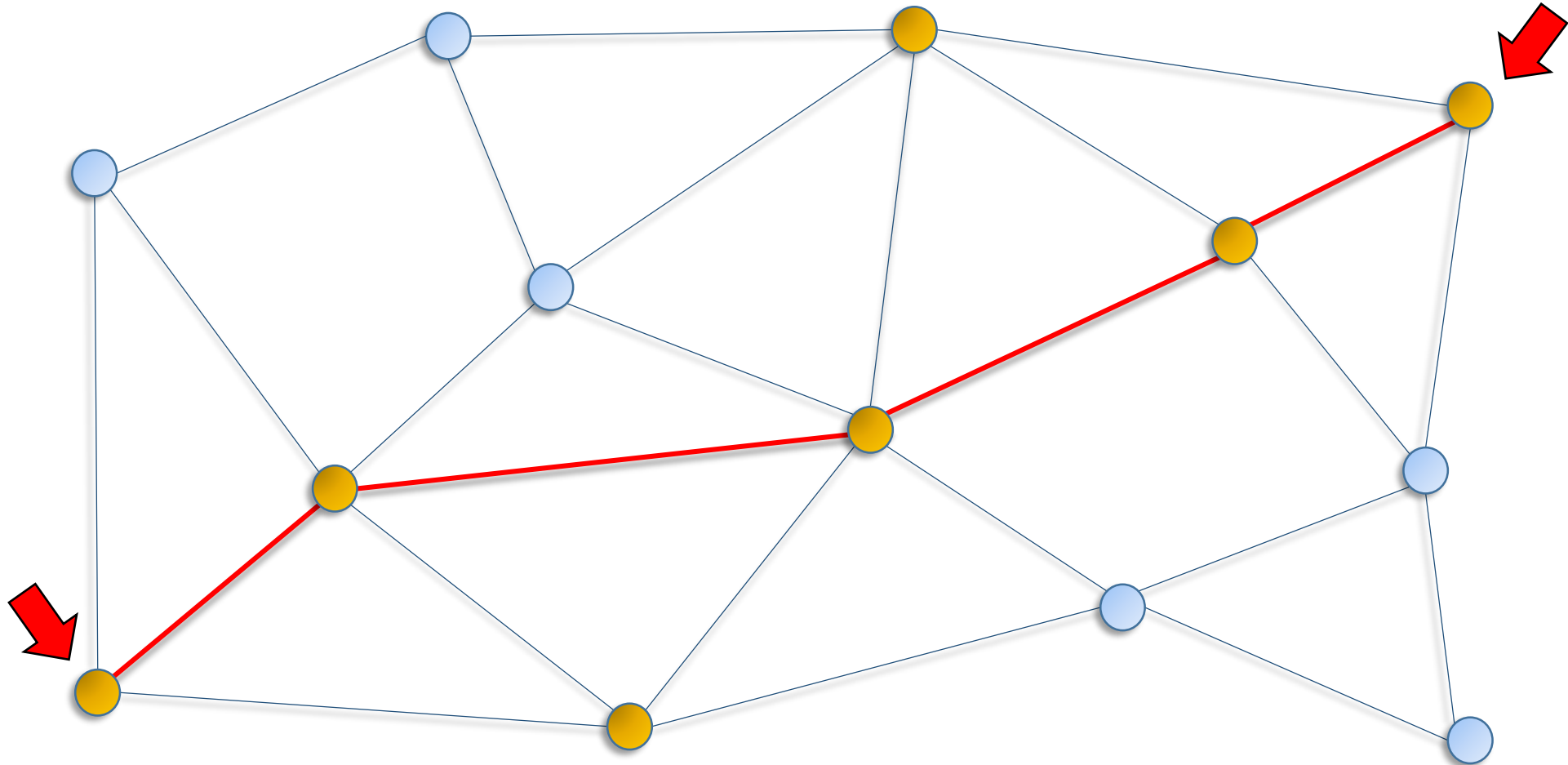
Convexidade geodética em grafos



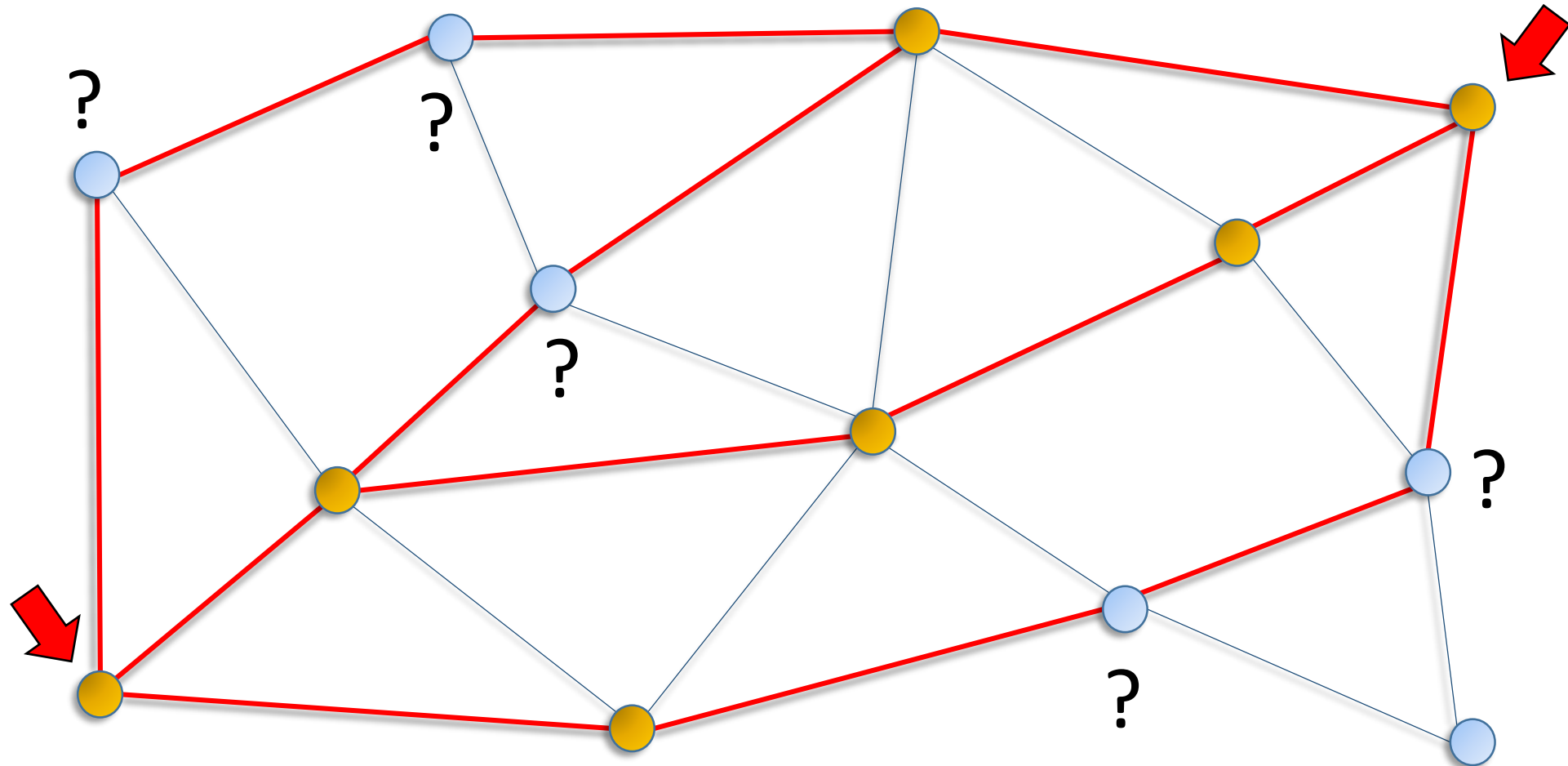
Convexidade geodética em grafos



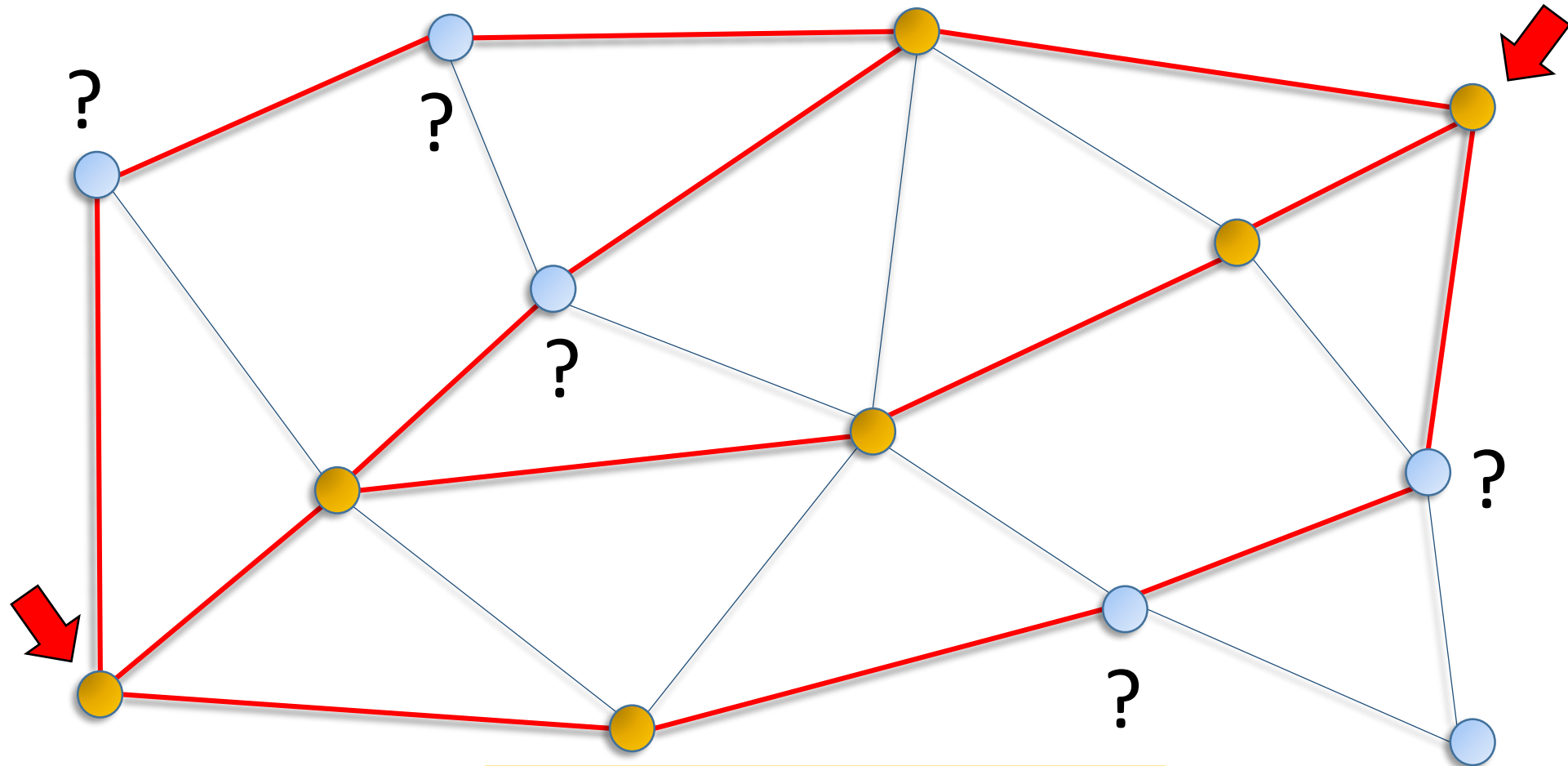
Convexidade geodética em grafos



Convexidade geodética em grafos

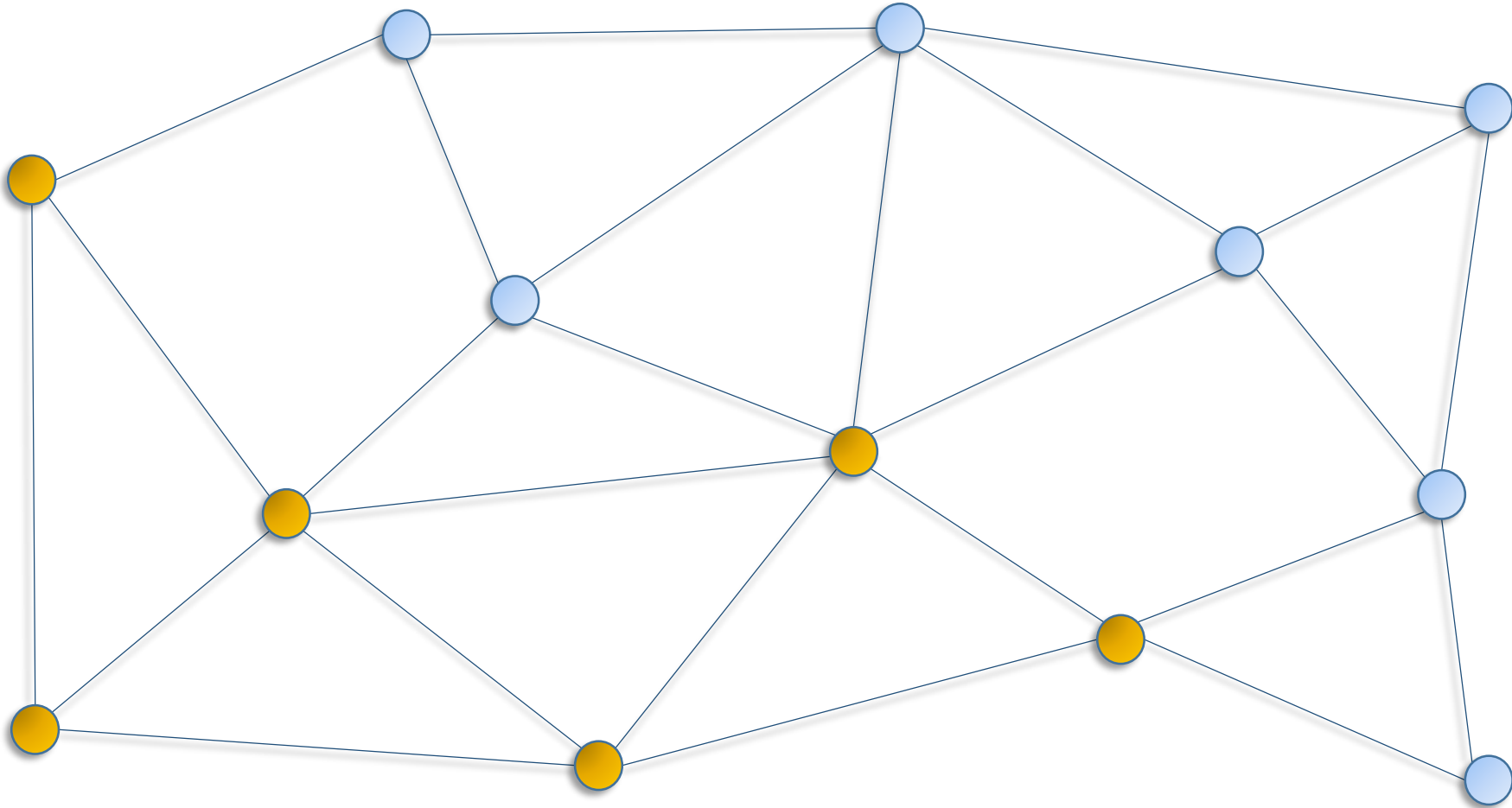


Convexidade geodética em grafos

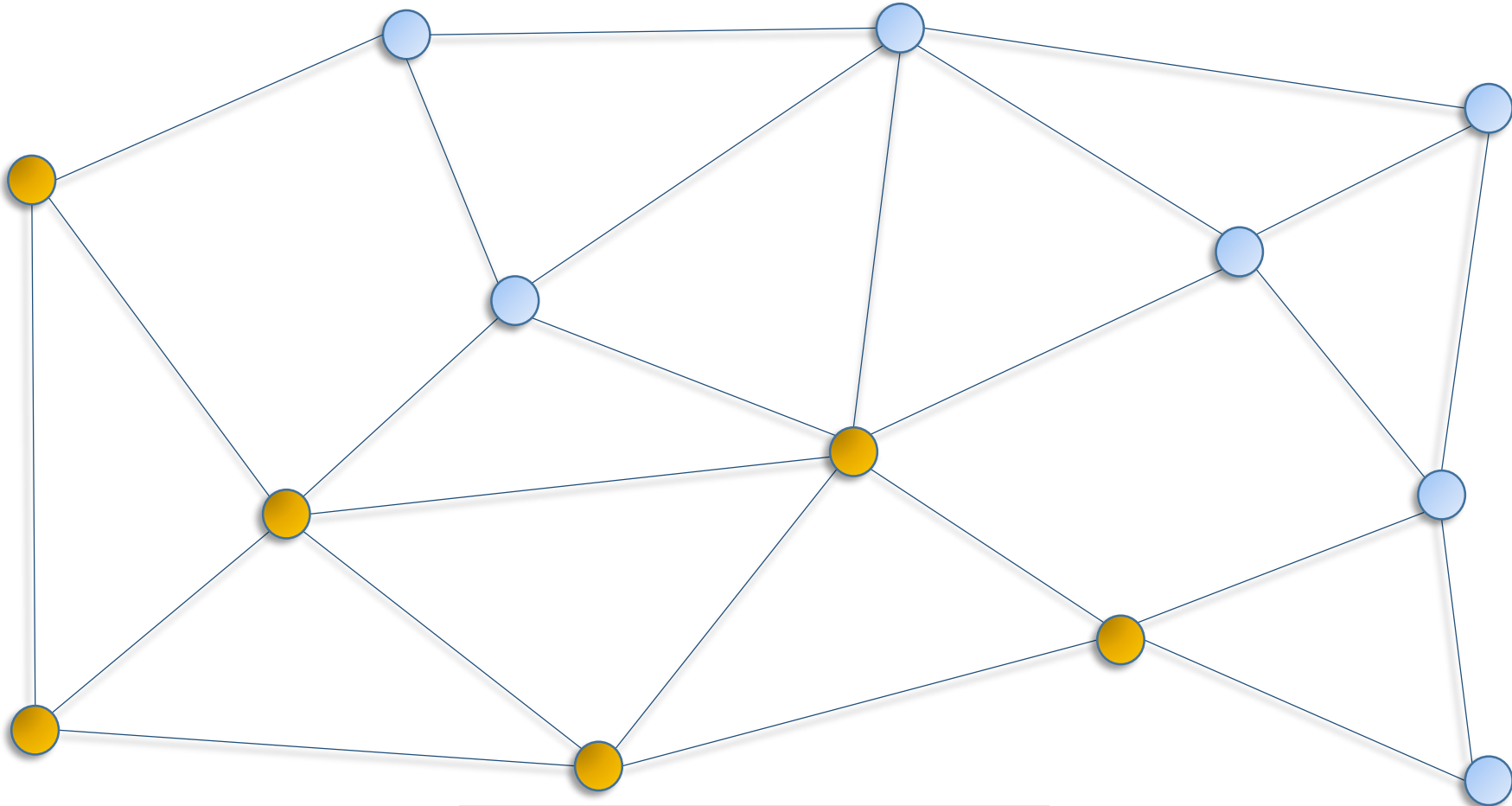


conjunto não convexo!

Convexidade geodética em grafos

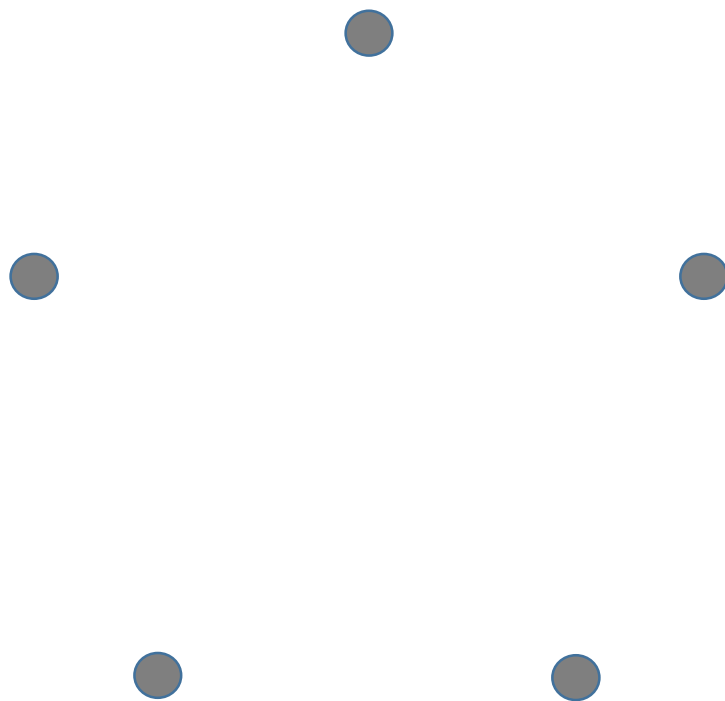


Convexidade geodética em grafos

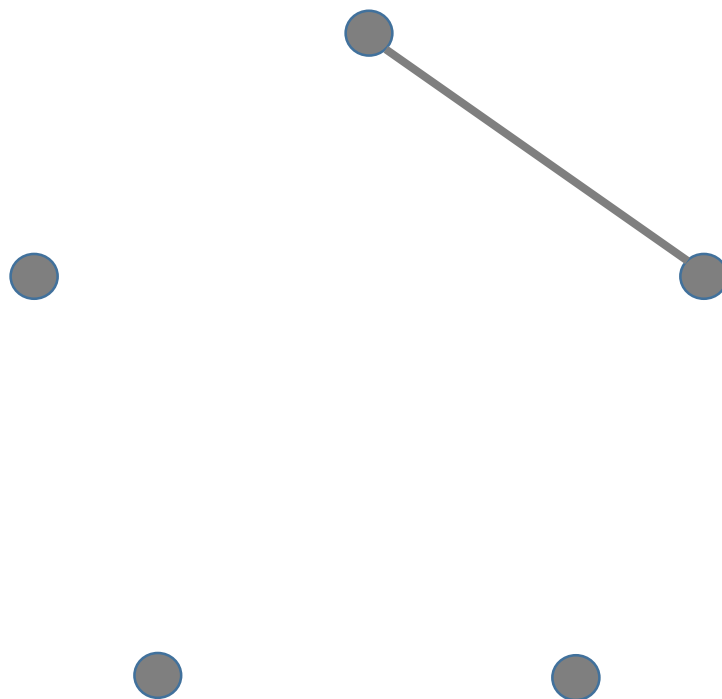


conjunto convexo!

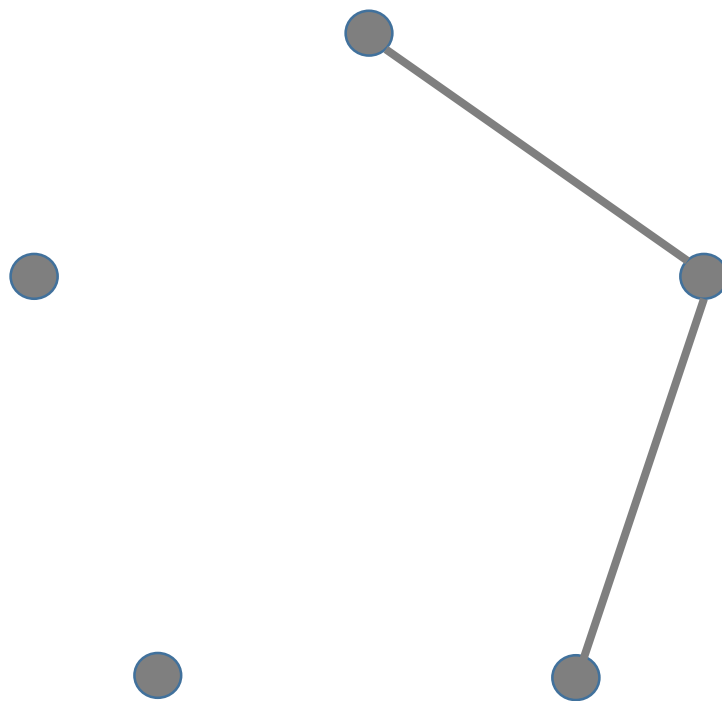
Envoltória convexa



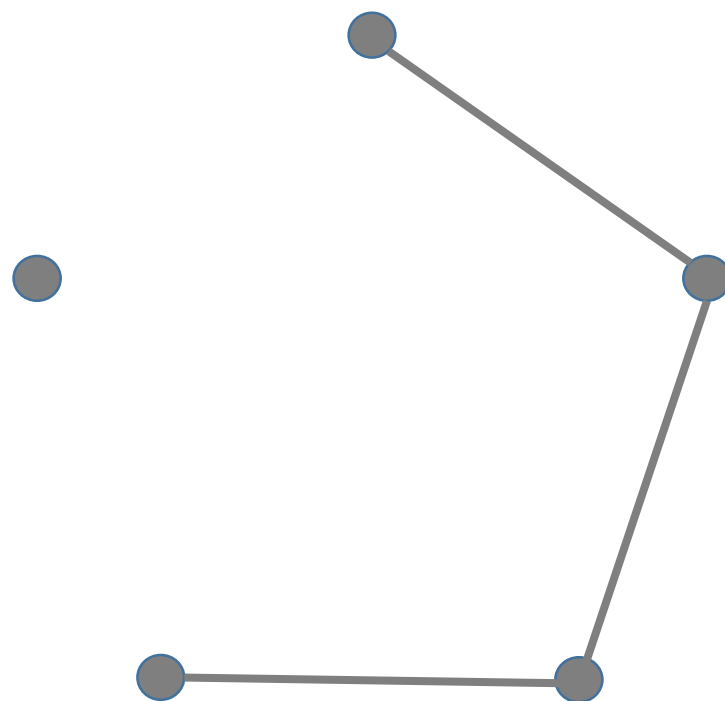
Envoltória convexa



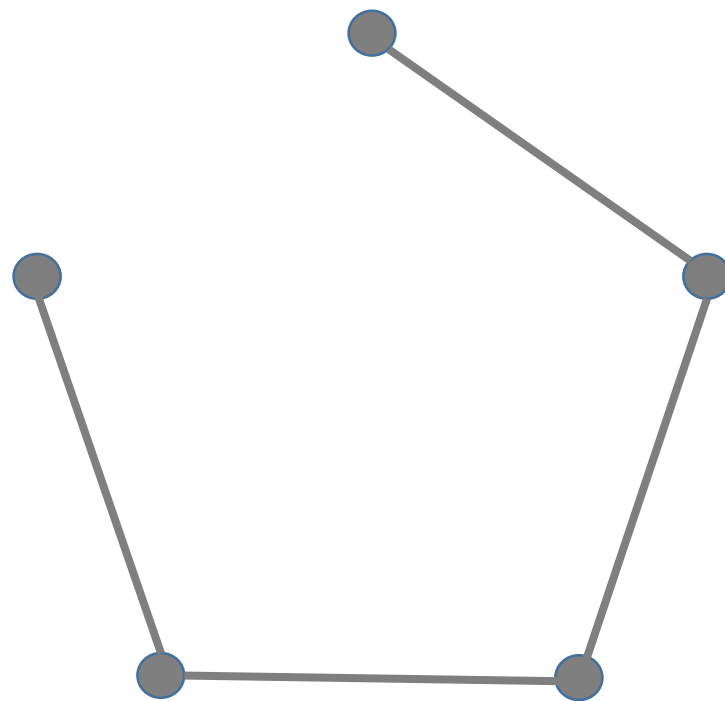
Envoltória convexa



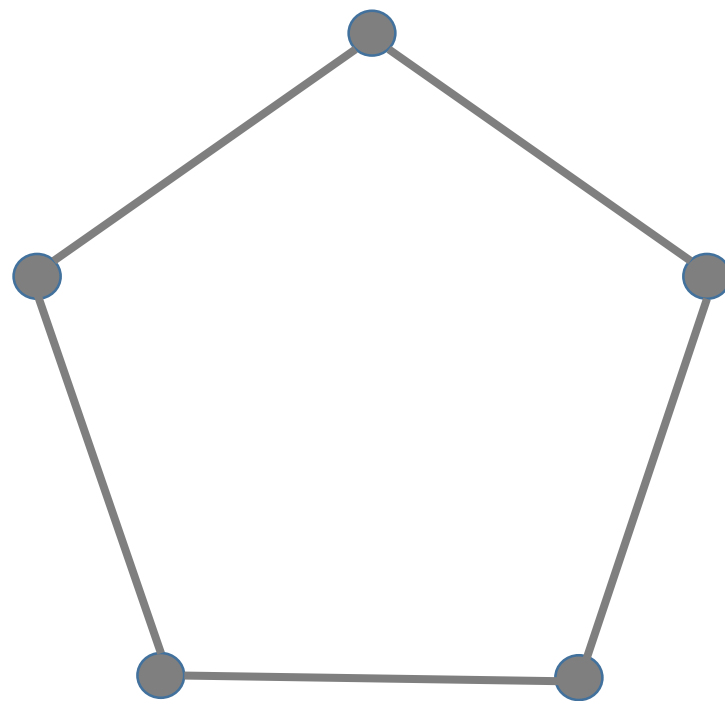
Envoltória convexa



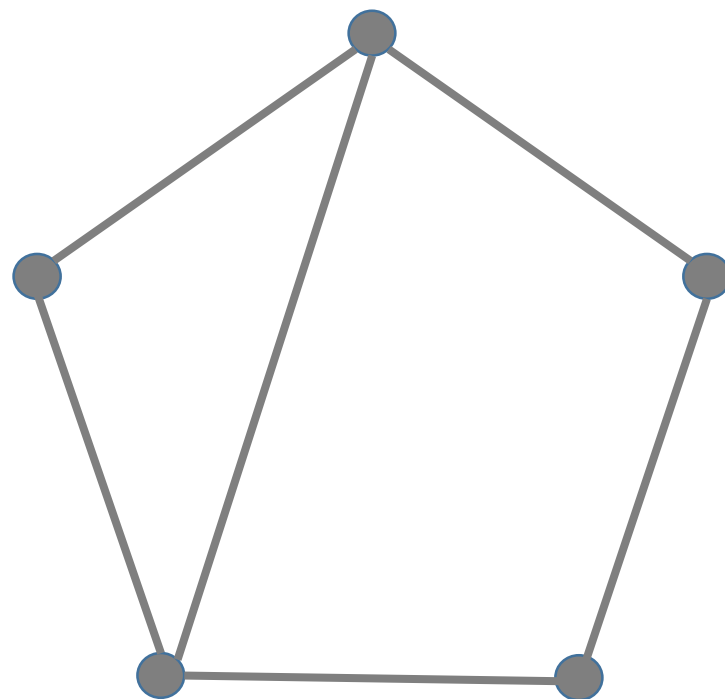
Envoltória convexa



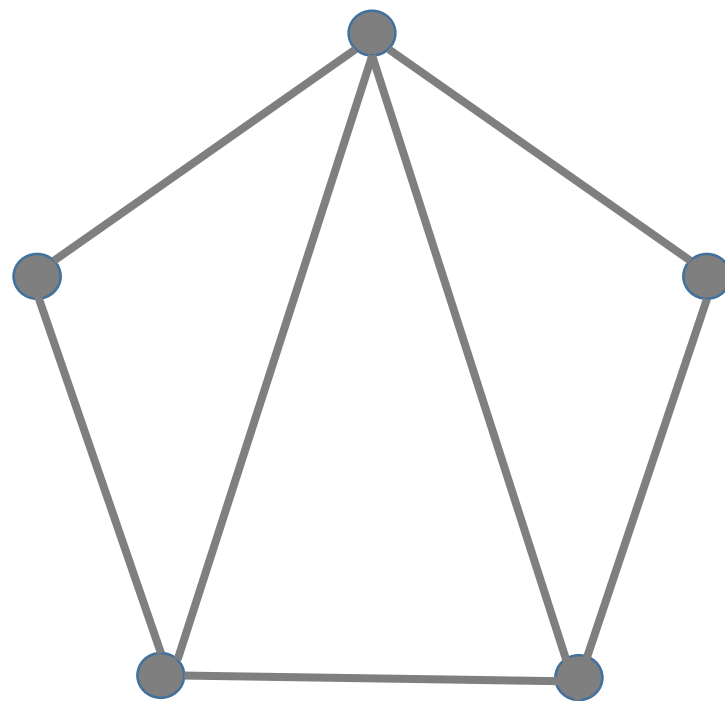
Envoltória convexa



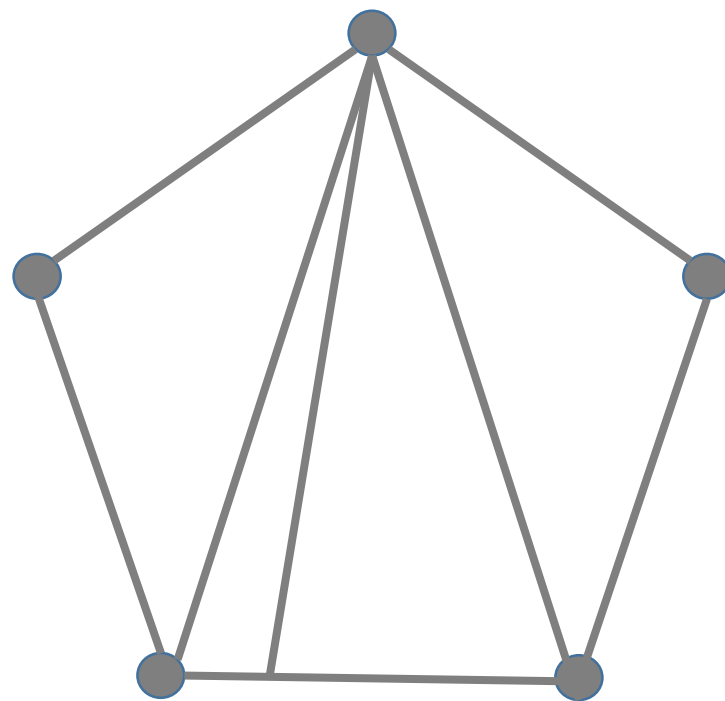
Envoltória convexa



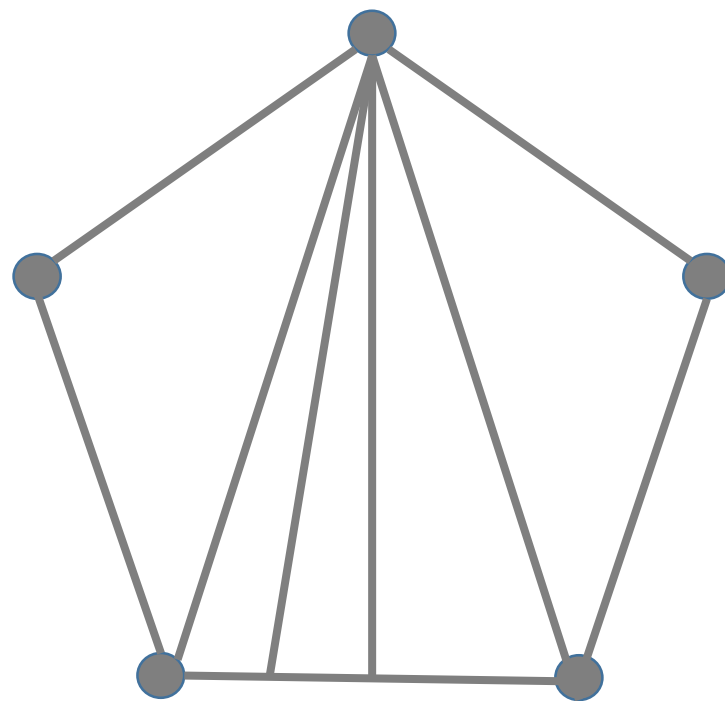
Envoltória convexa



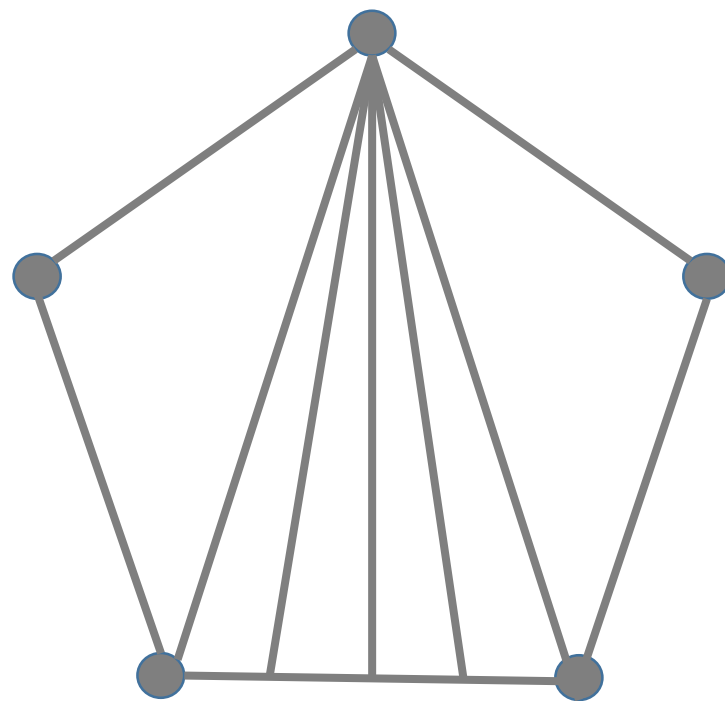
Envoltória convexa



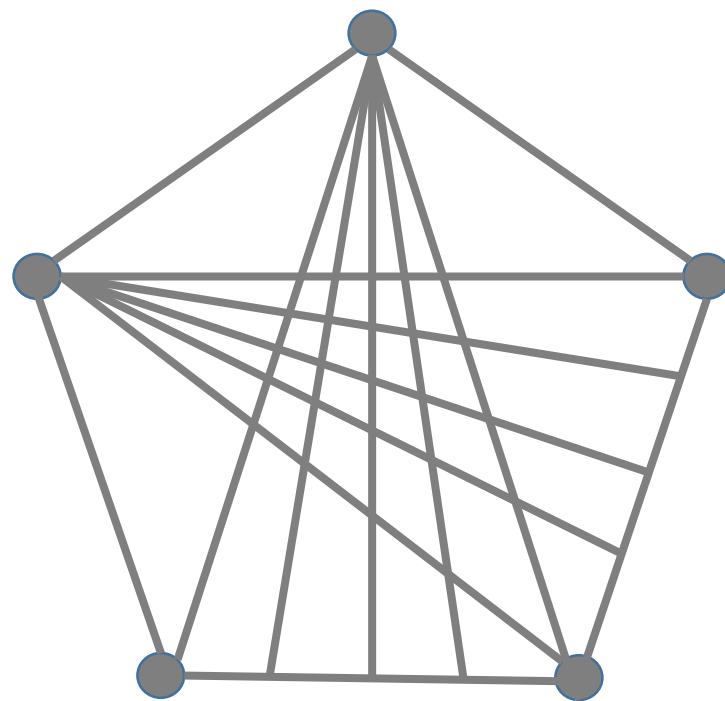
Envoltória convexa



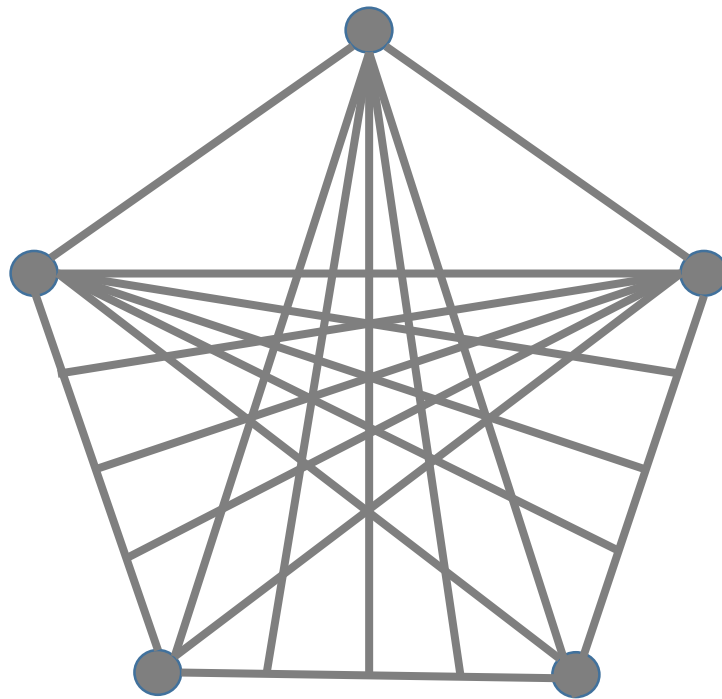
Envoltória convexa



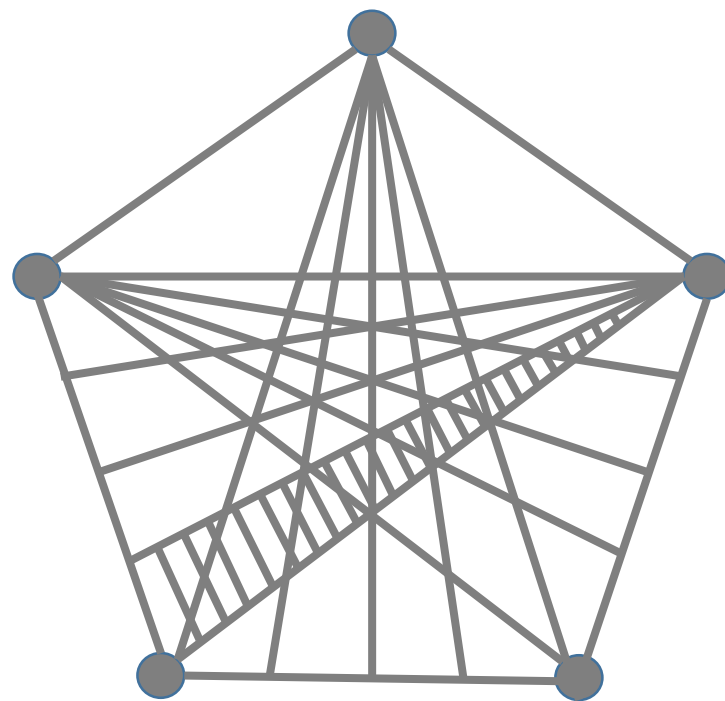
Envoltória convexa



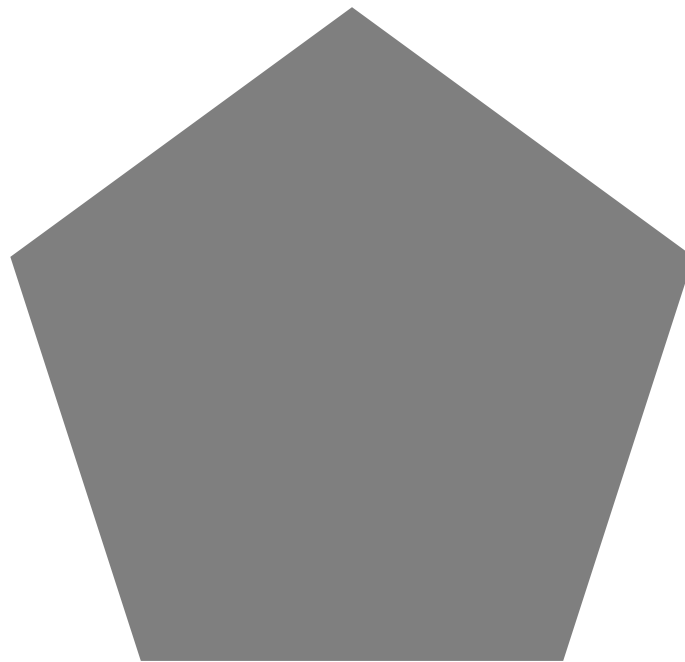
Envoltória convexa



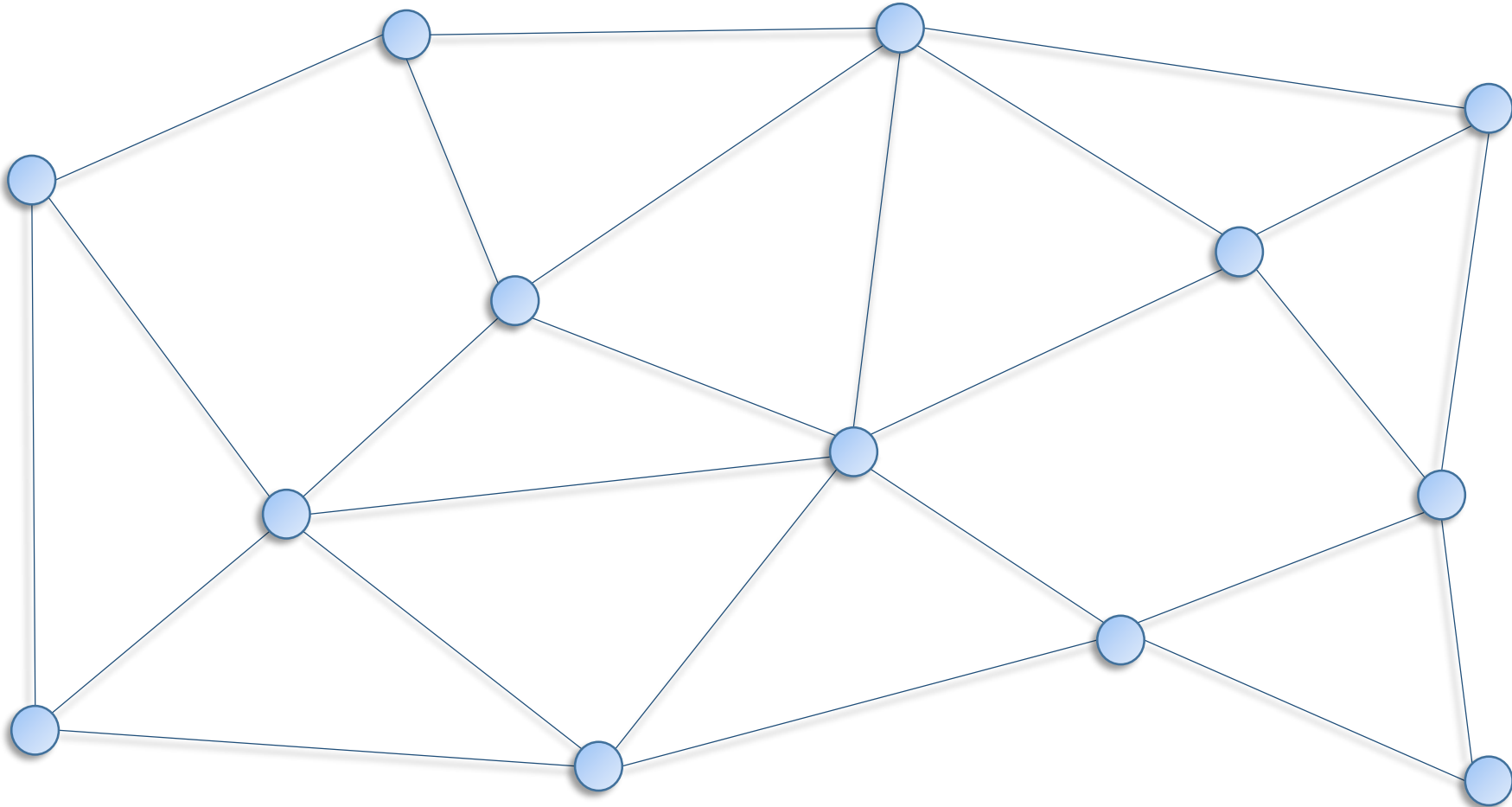
Envoltória convexa



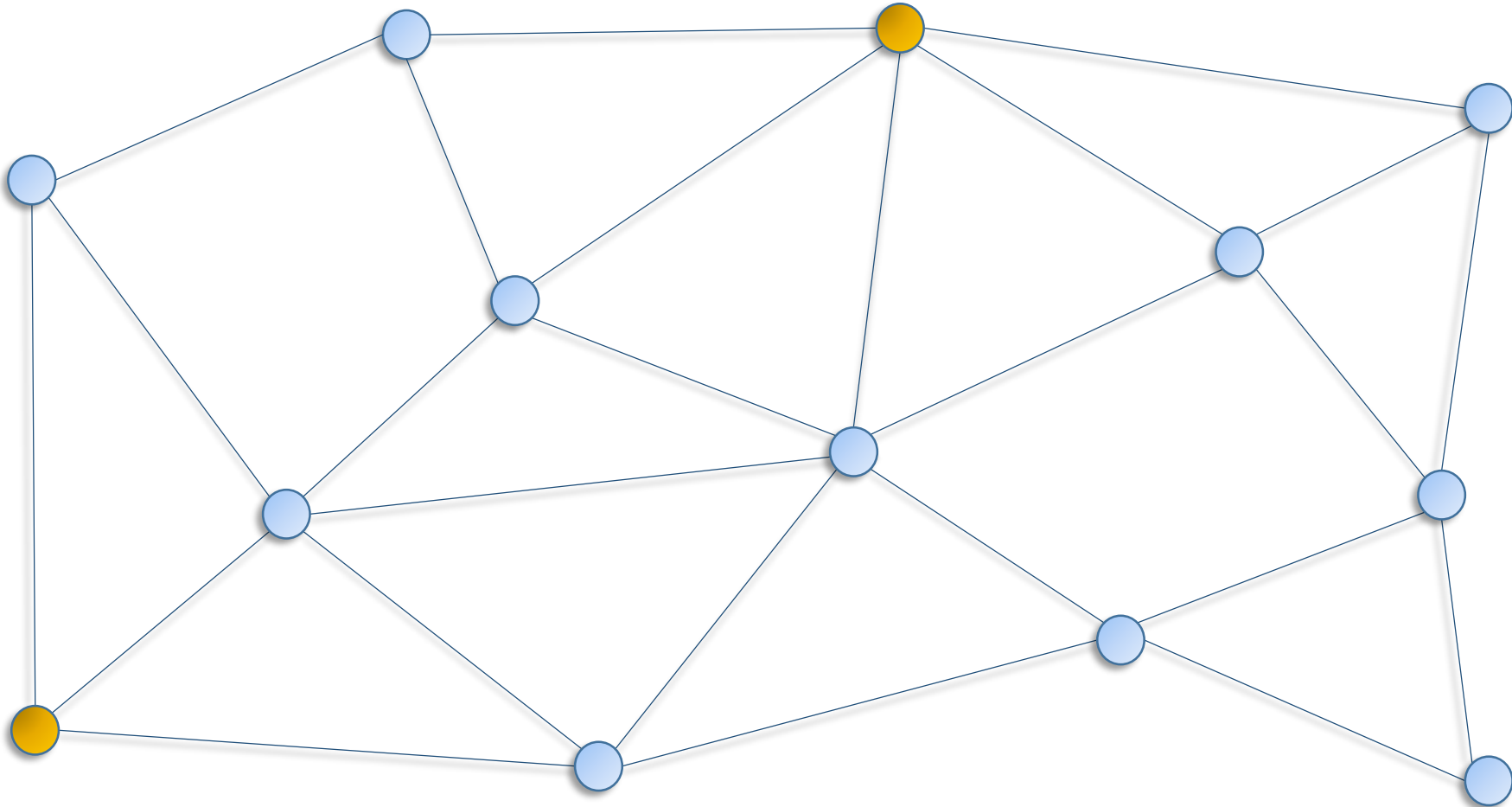
Envoltória convexa



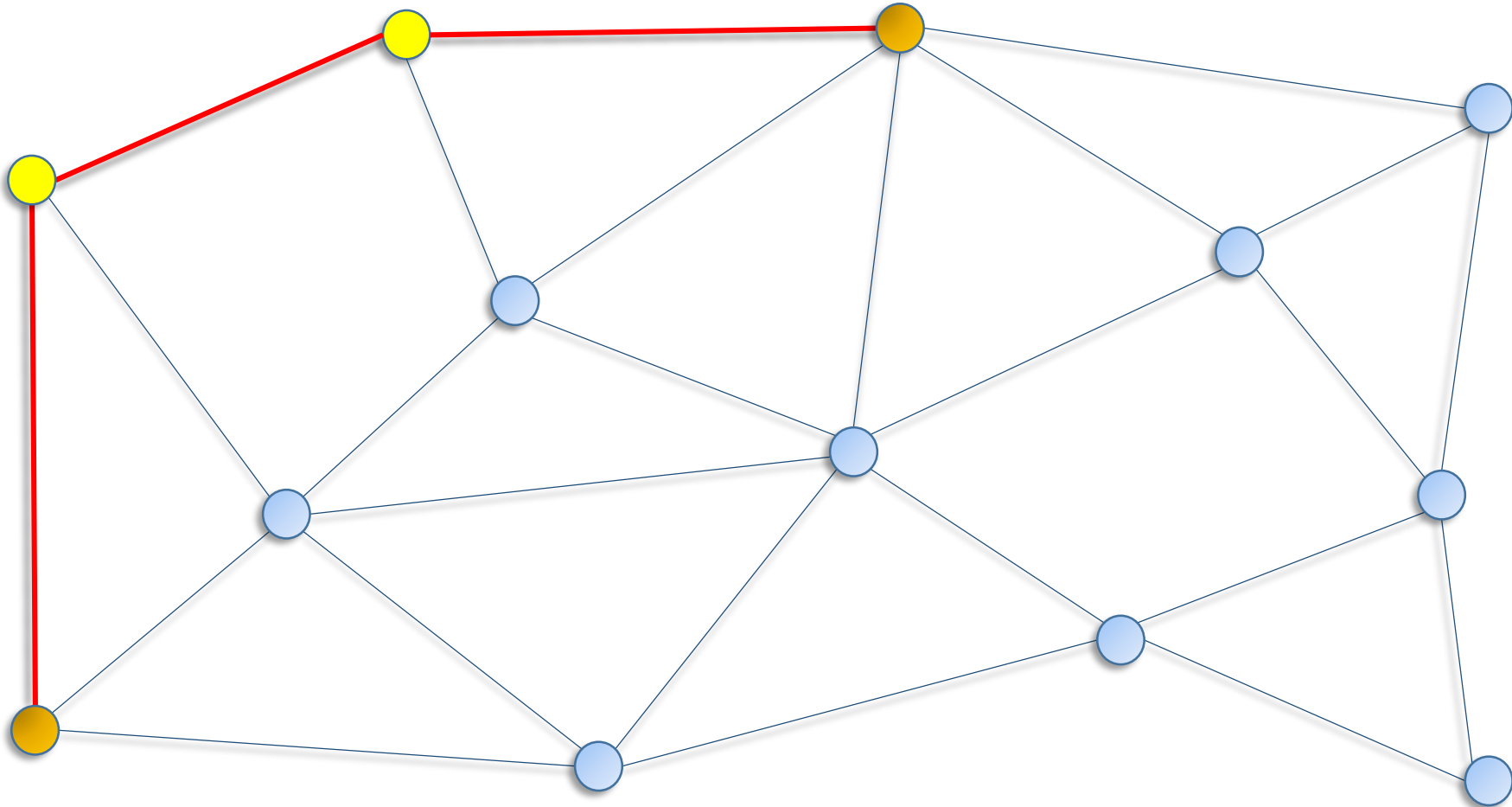
Envoltória convexa em grafos



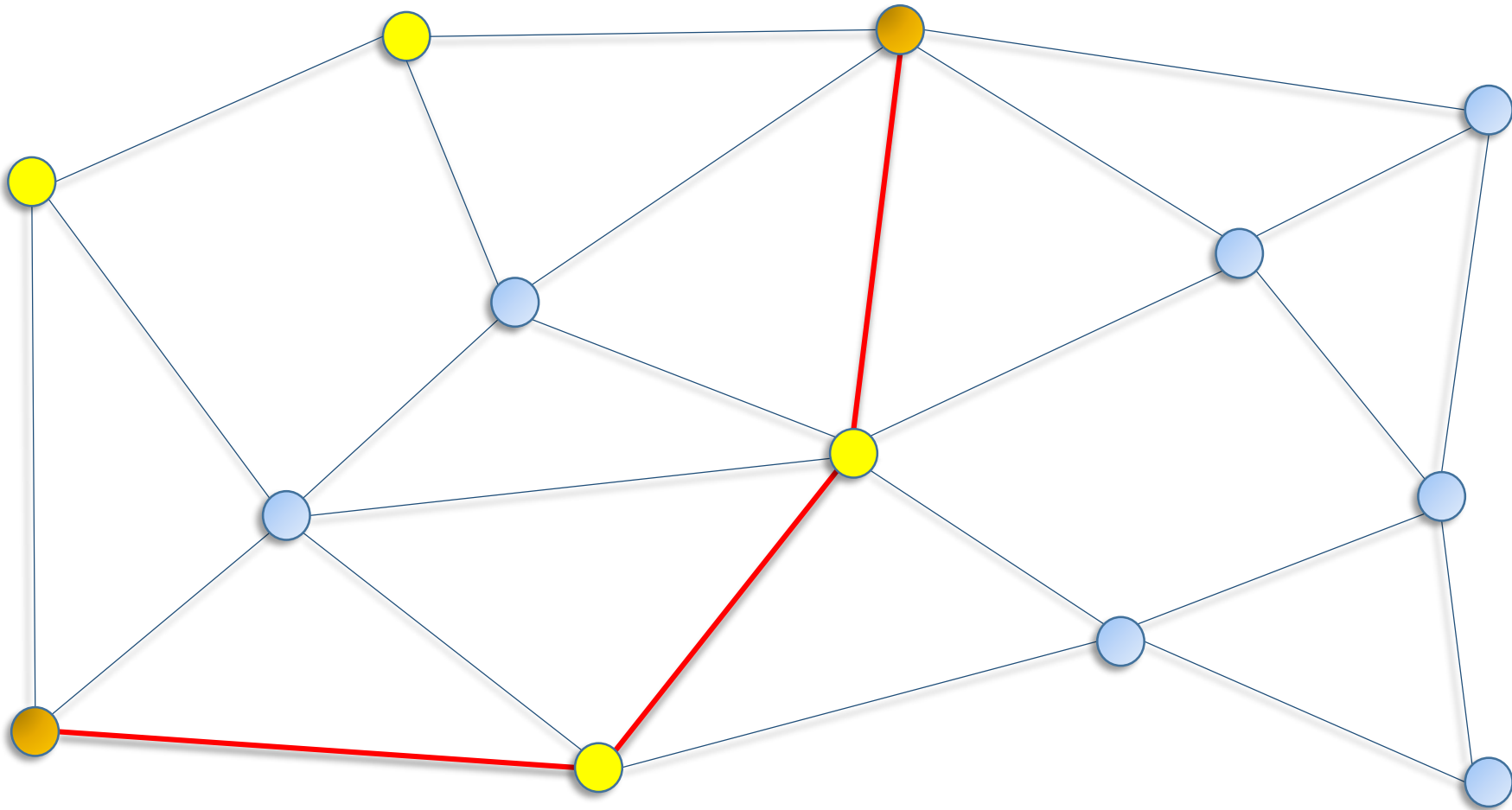
Envoltória convexa em grafos



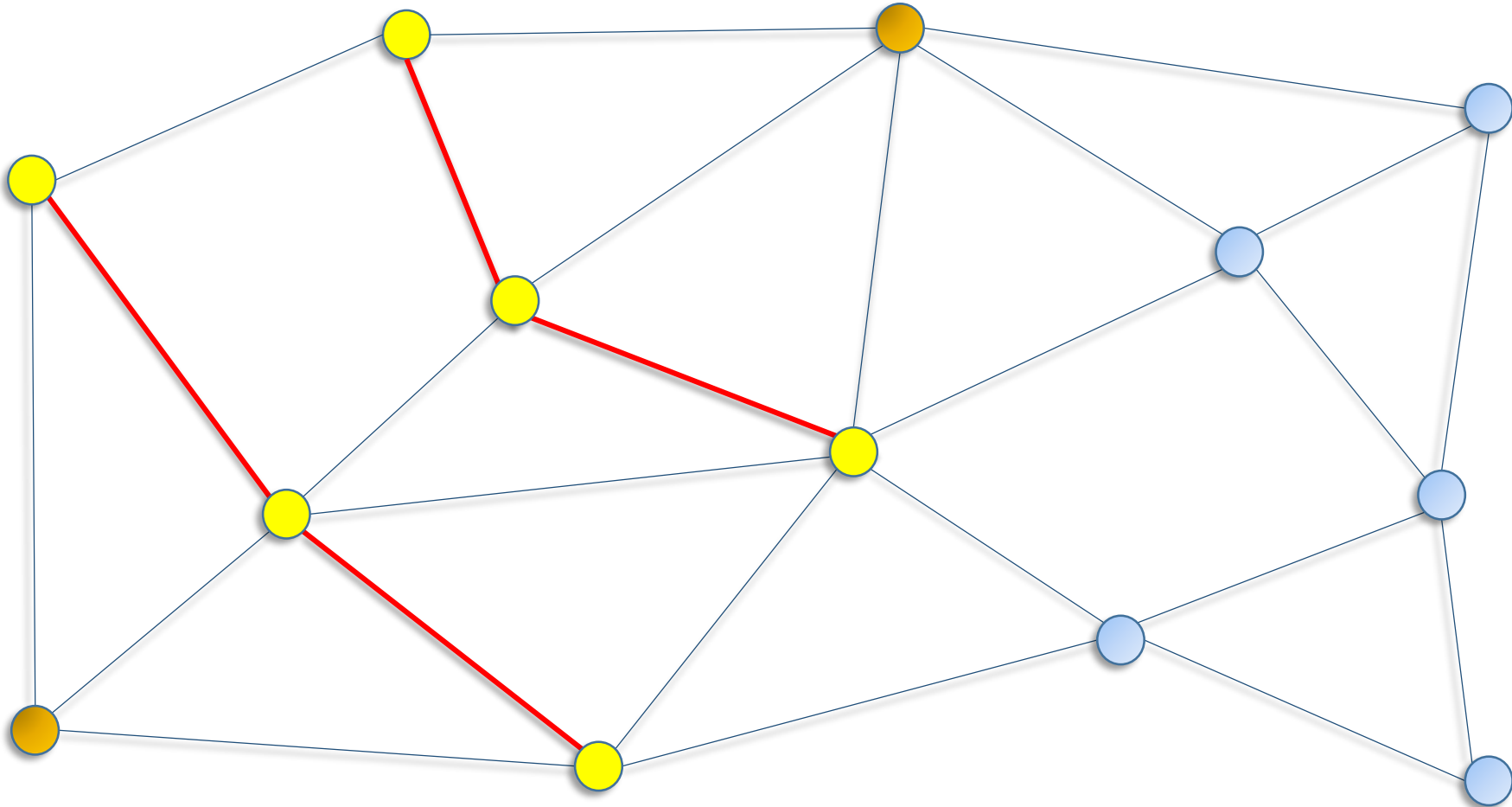
Envoltória convexa em grafos



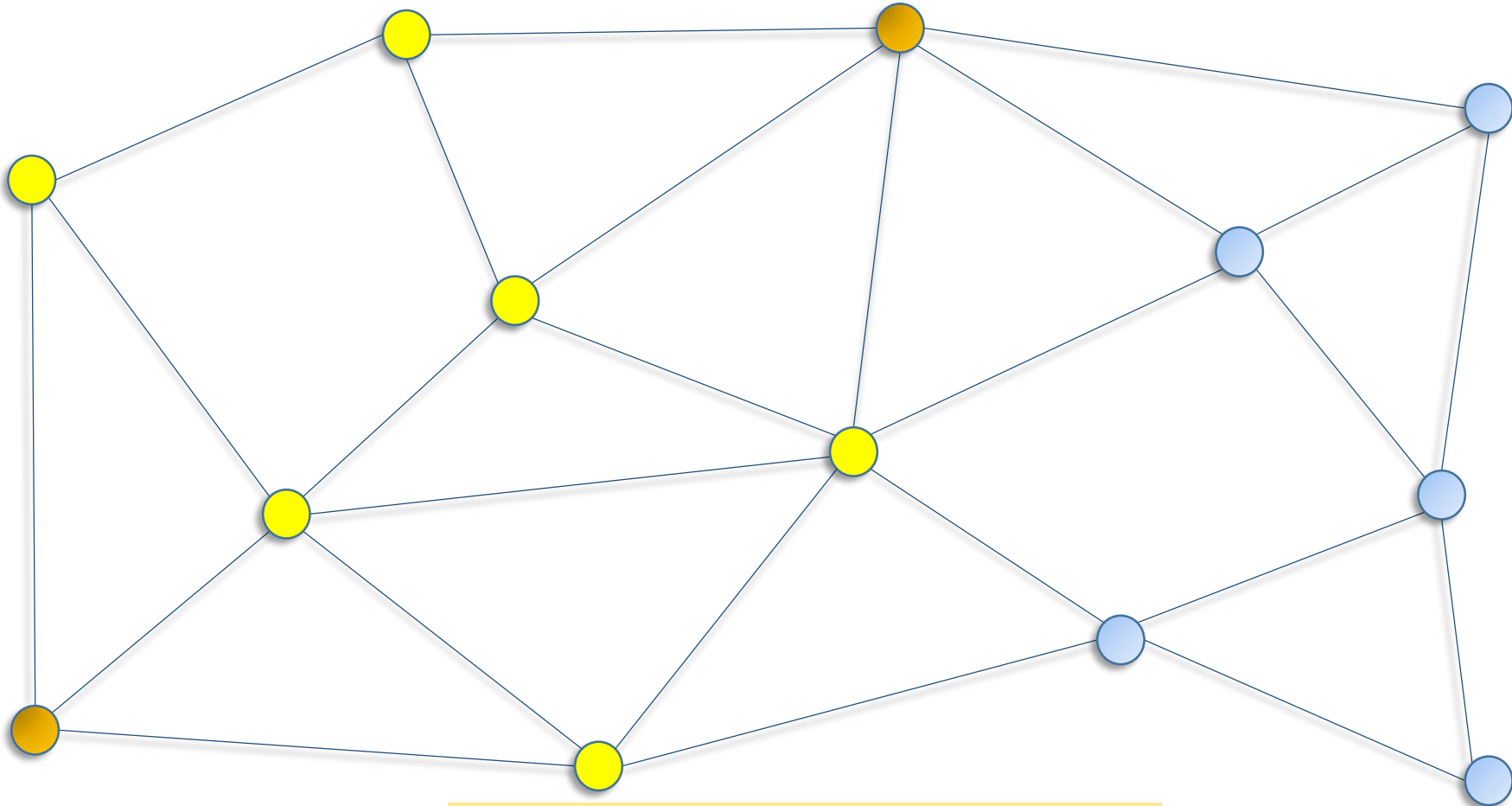
Envoltória convexa em grafos



Envoltória convexa em grafos

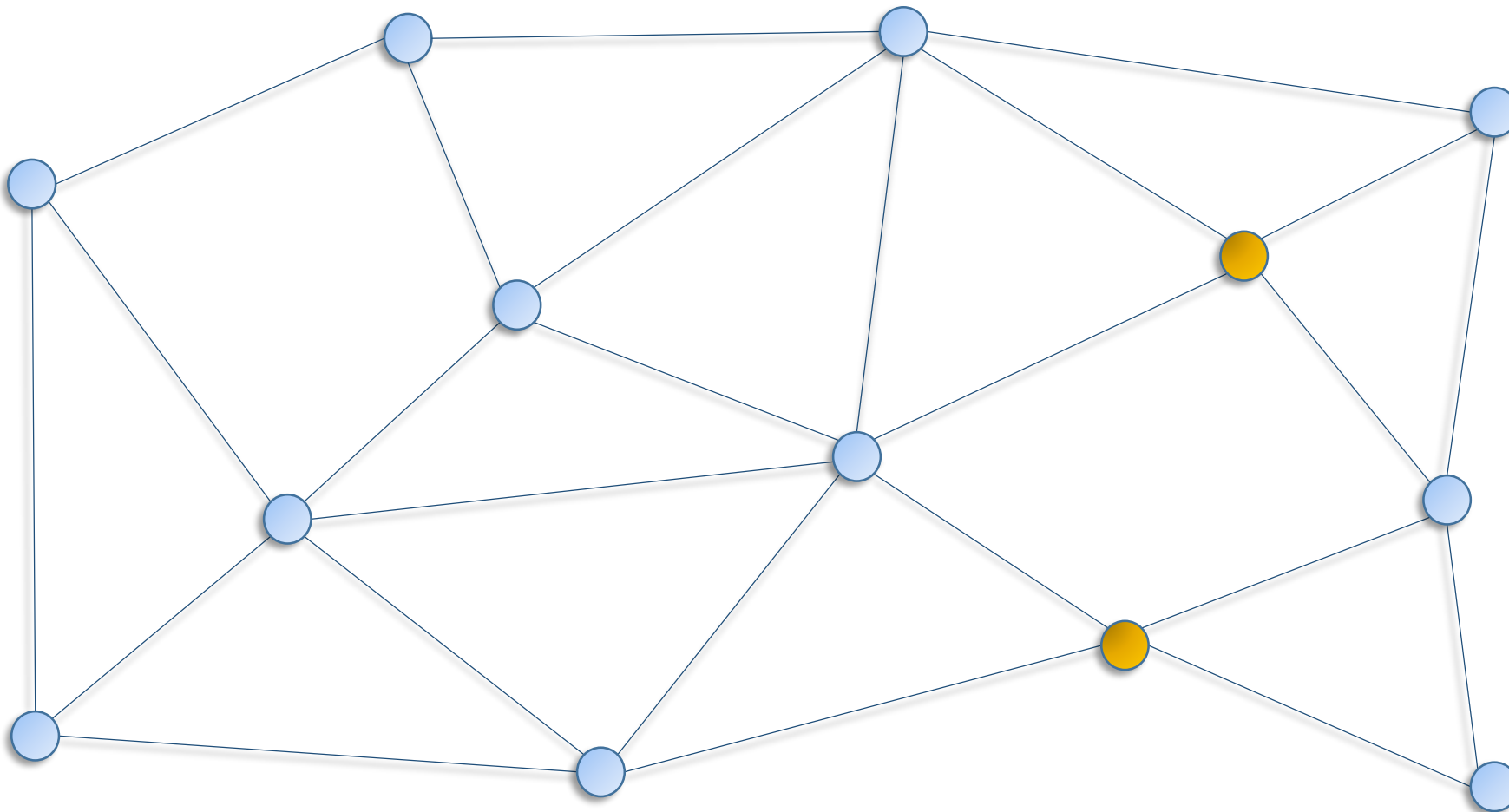


Envoltória convexa em grafos

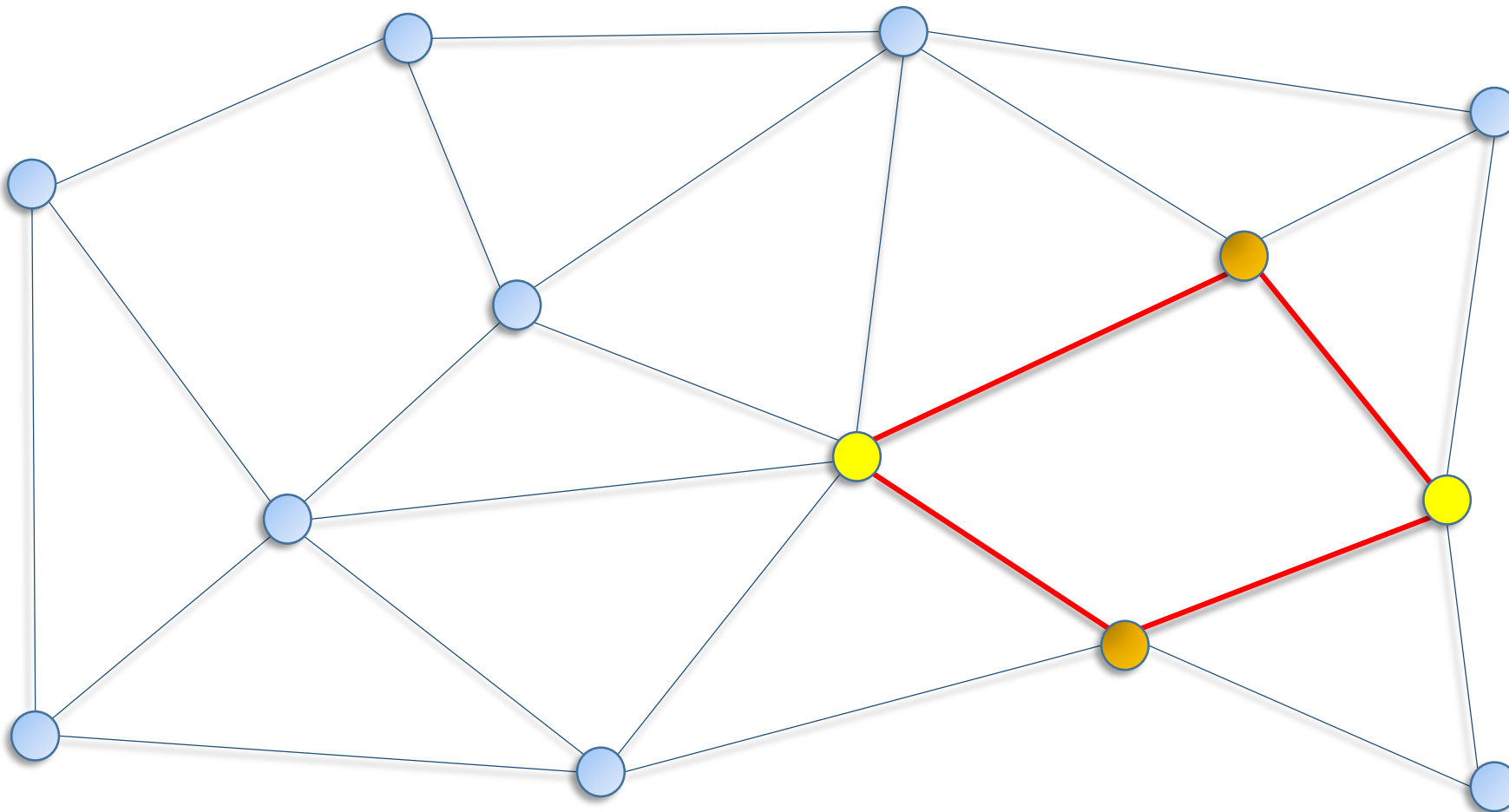


processo estabilizado!

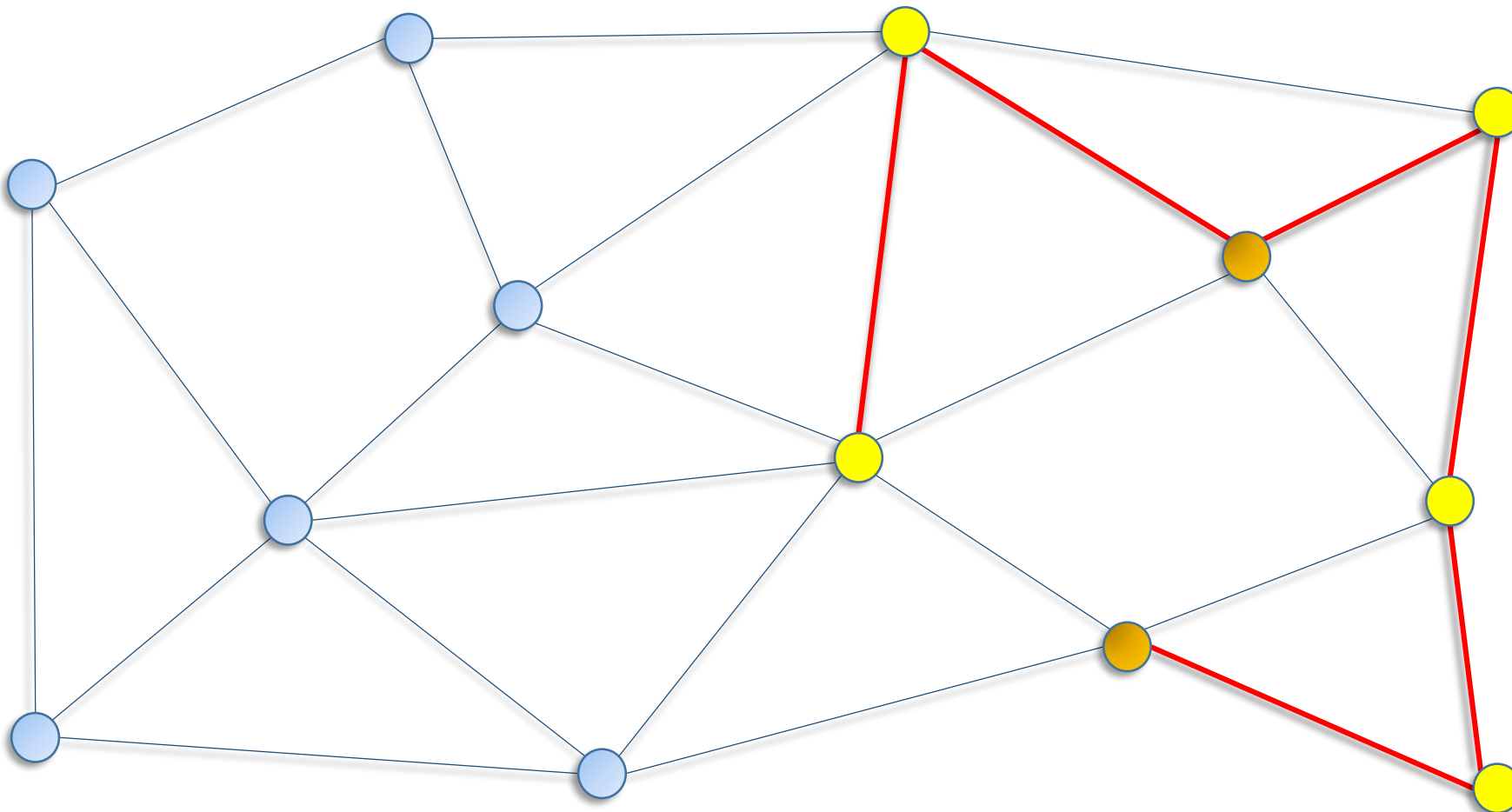
Disseminação de opinião: convexidade de caminhos de comprimento 2



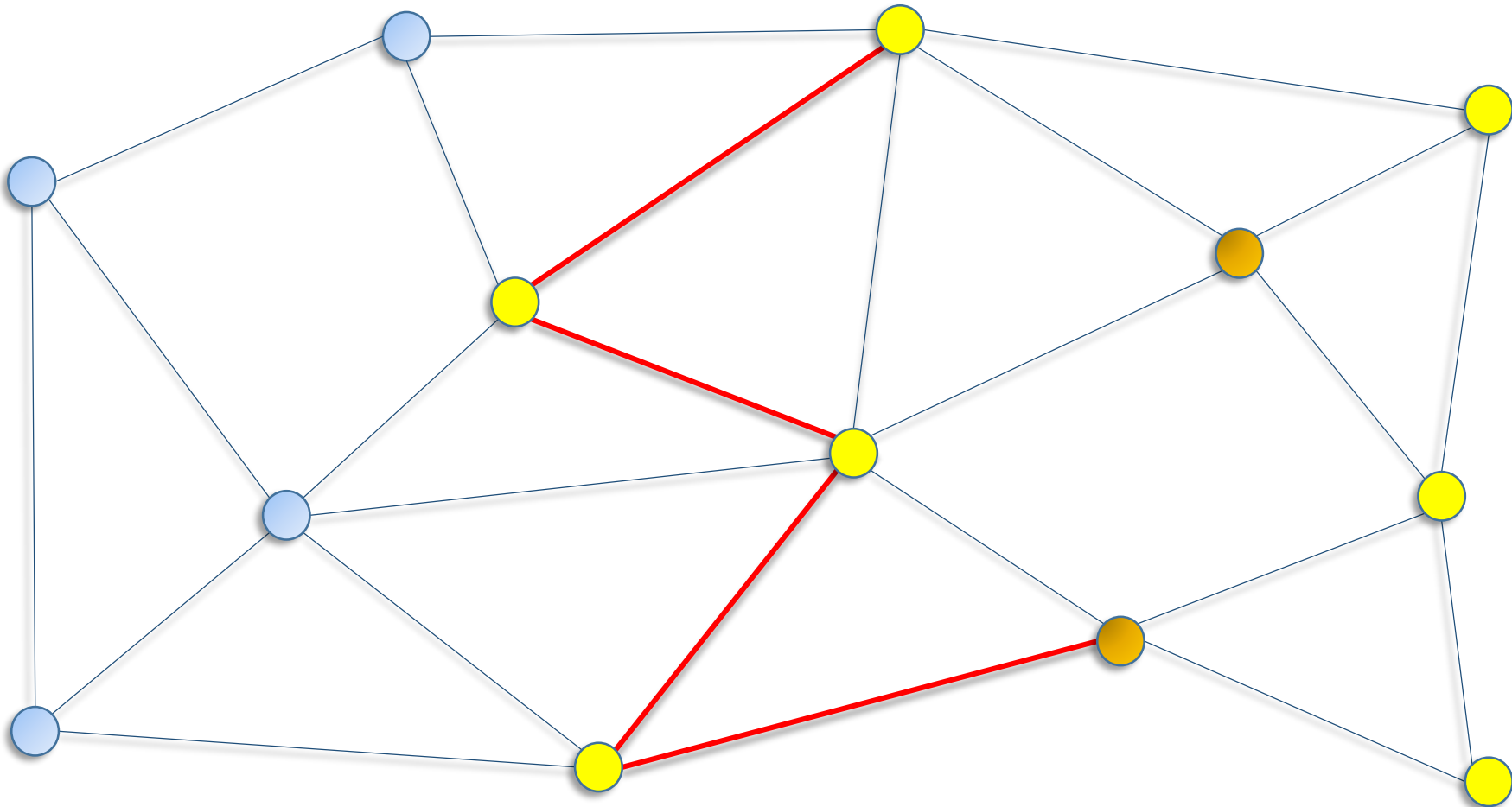
Disseminação de opinião: convexidade de caminhos de comprimento 2



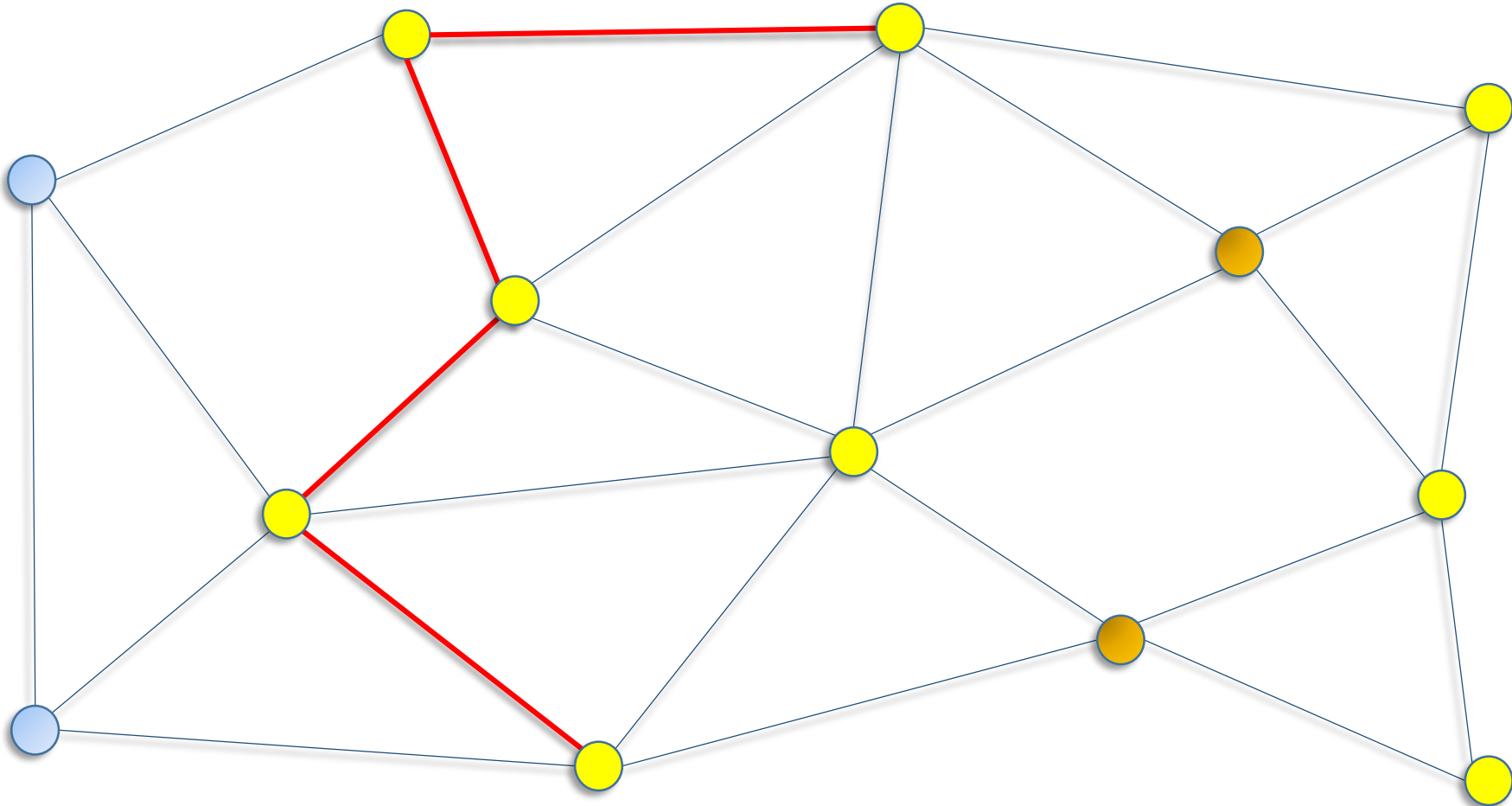
Disseminação de opinião: convexidade de caminhos de comprimento 2



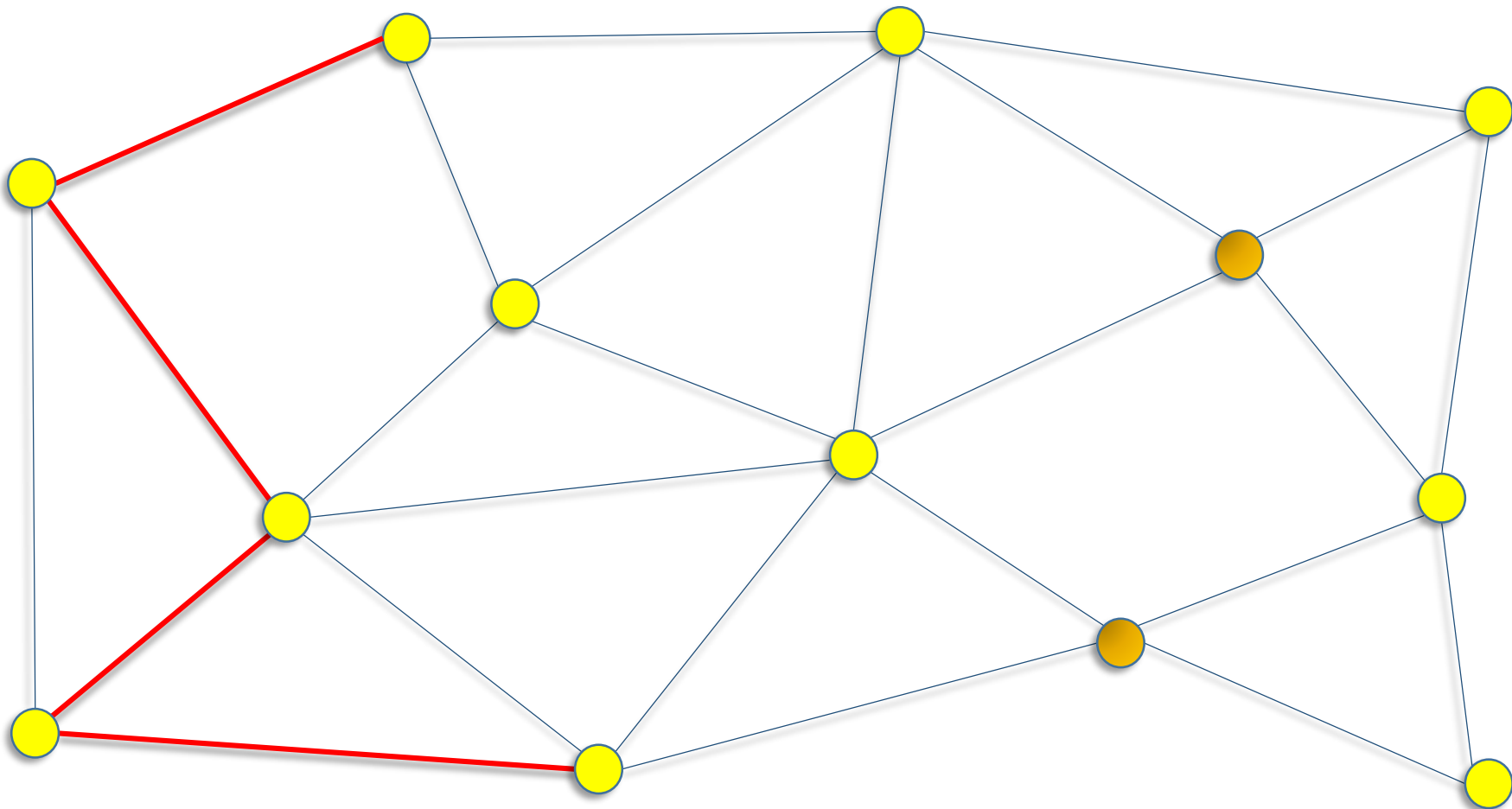
Disseminação de opinião: convexidade de caminhos de comprimento 2



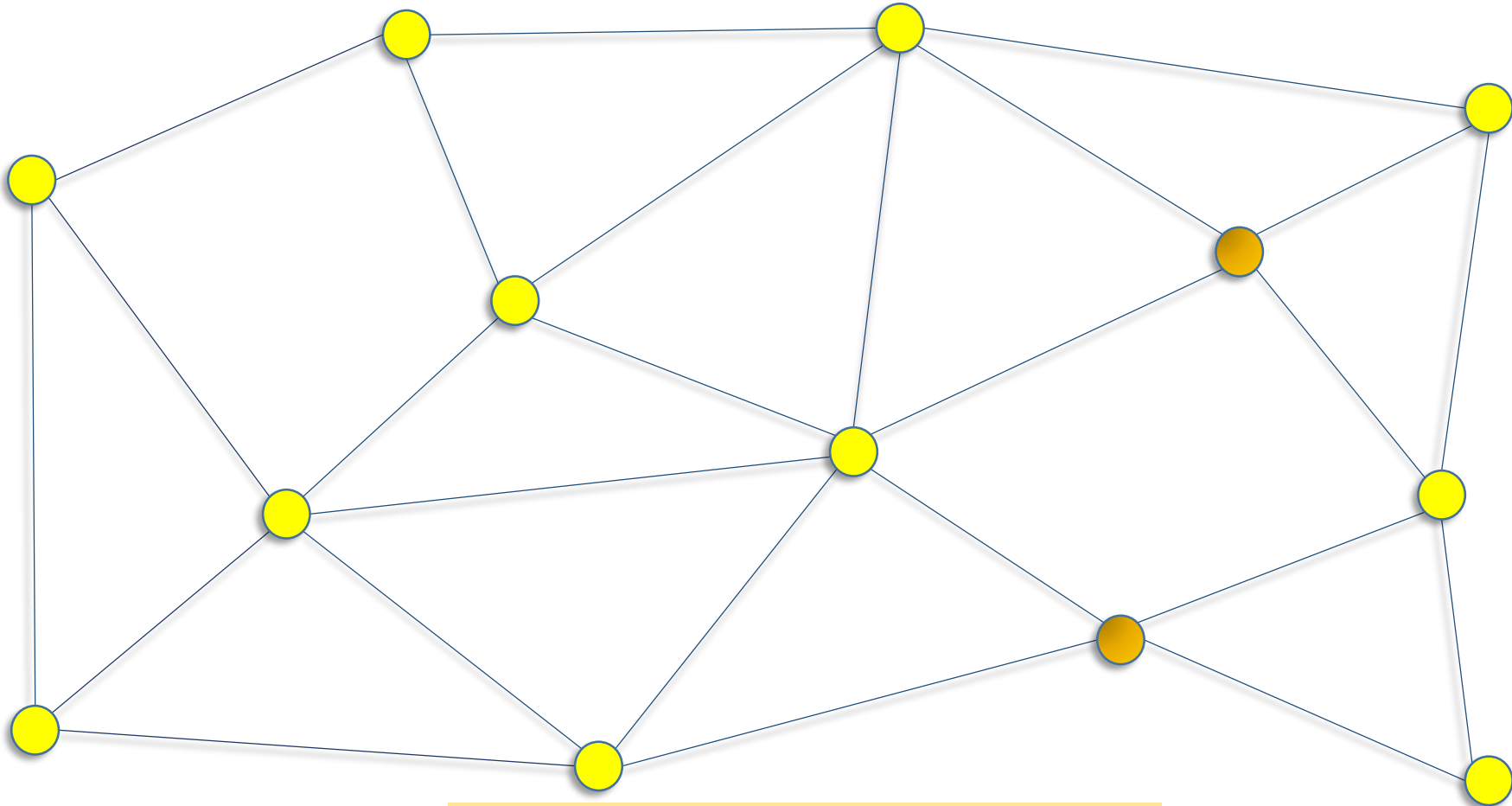
Disseminação de opinião: convexidade de caminhos de comprimento 2



Disseminação de opinião: convexidade de caminhos de comprimento 2

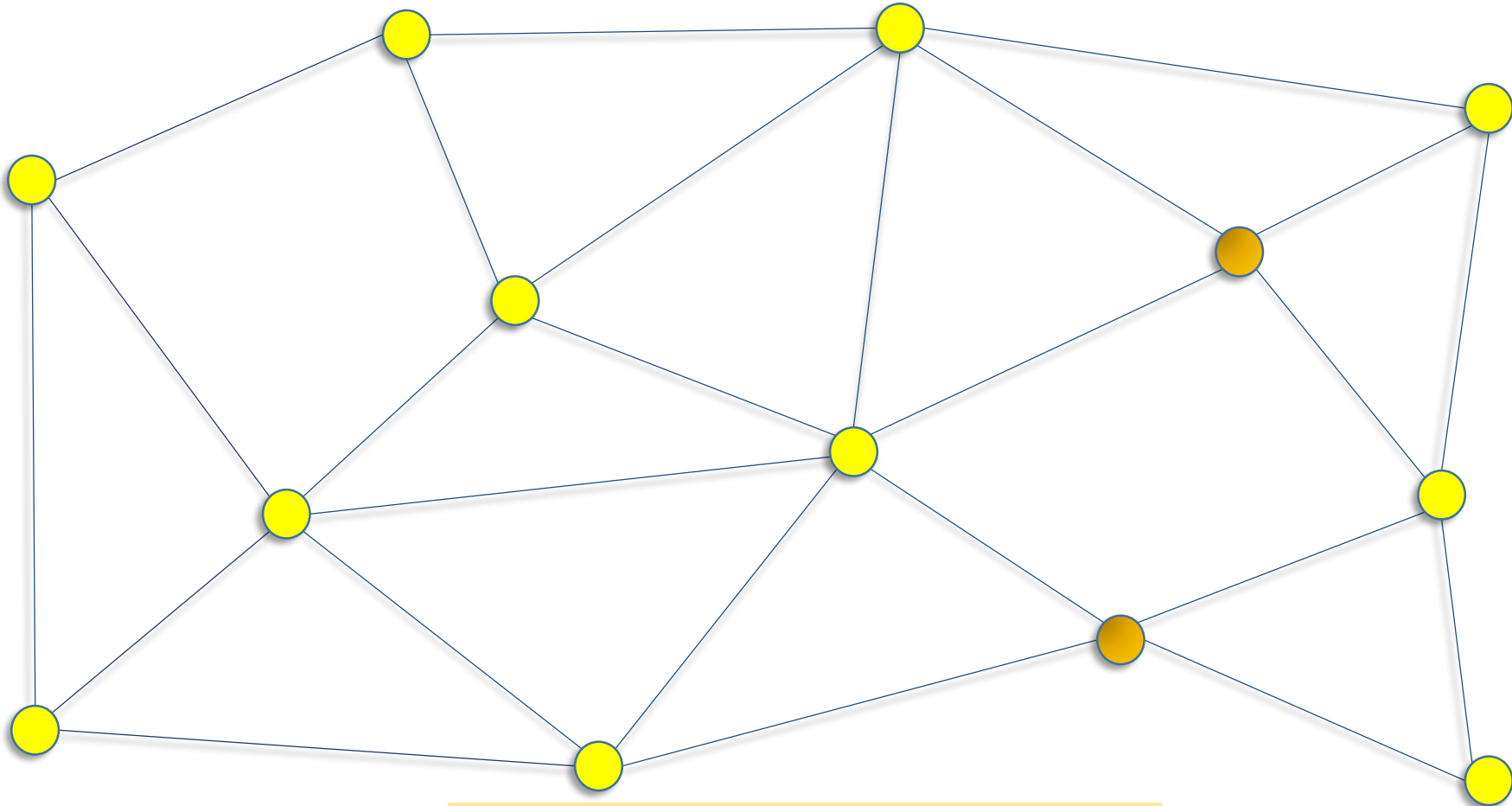


Disseminação de opinião: convexidade de caminhos de comprimento 2



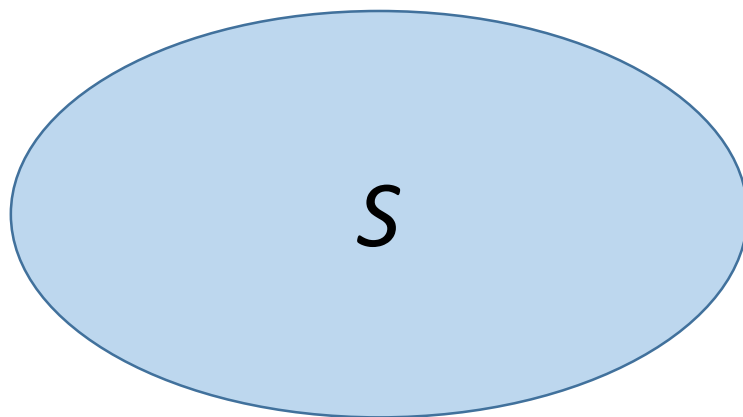
processo estabilizado!

Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com 2 elementos

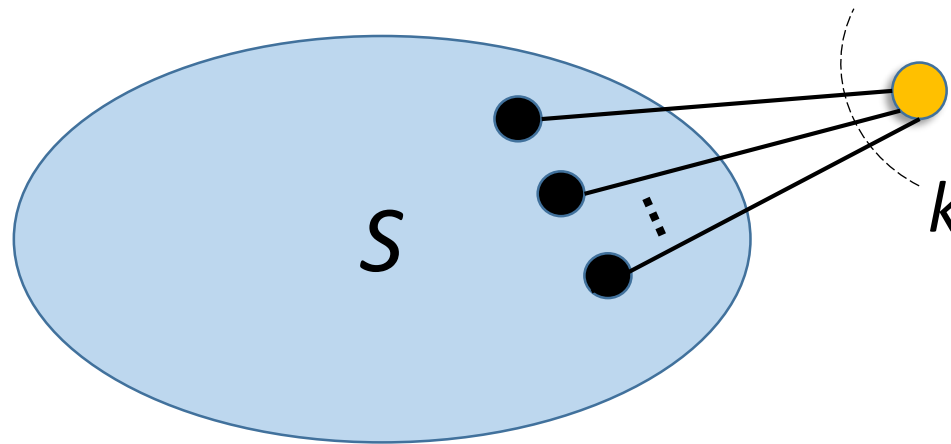


processo estabilizado!

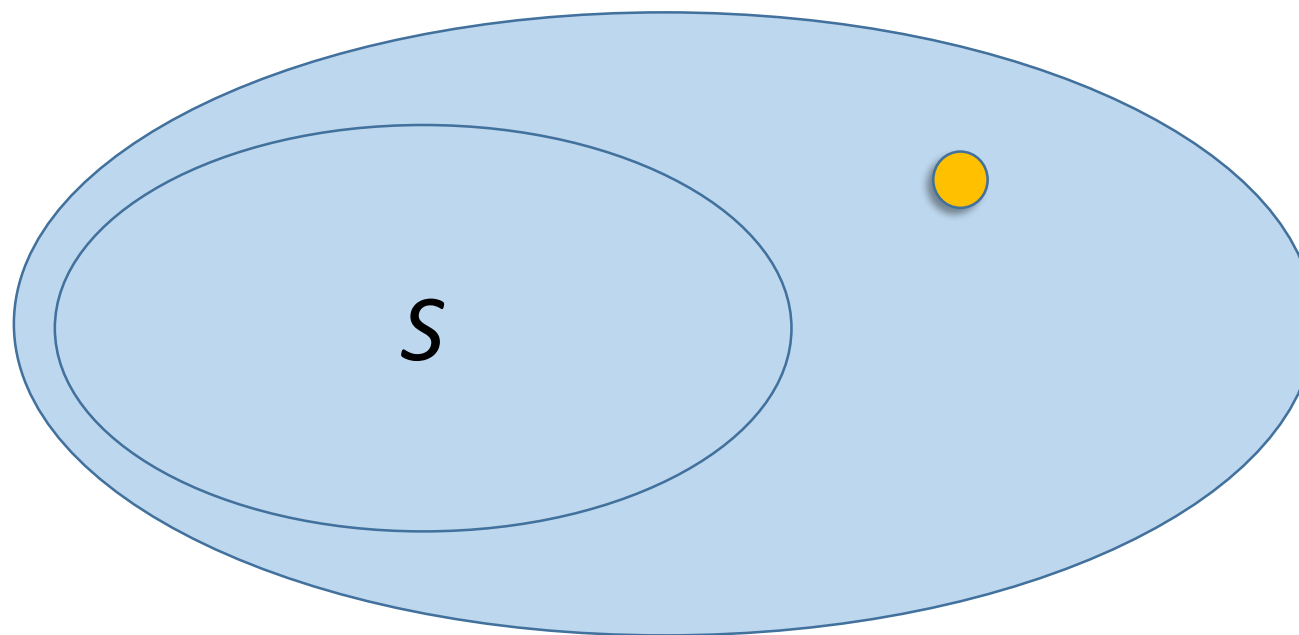
Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



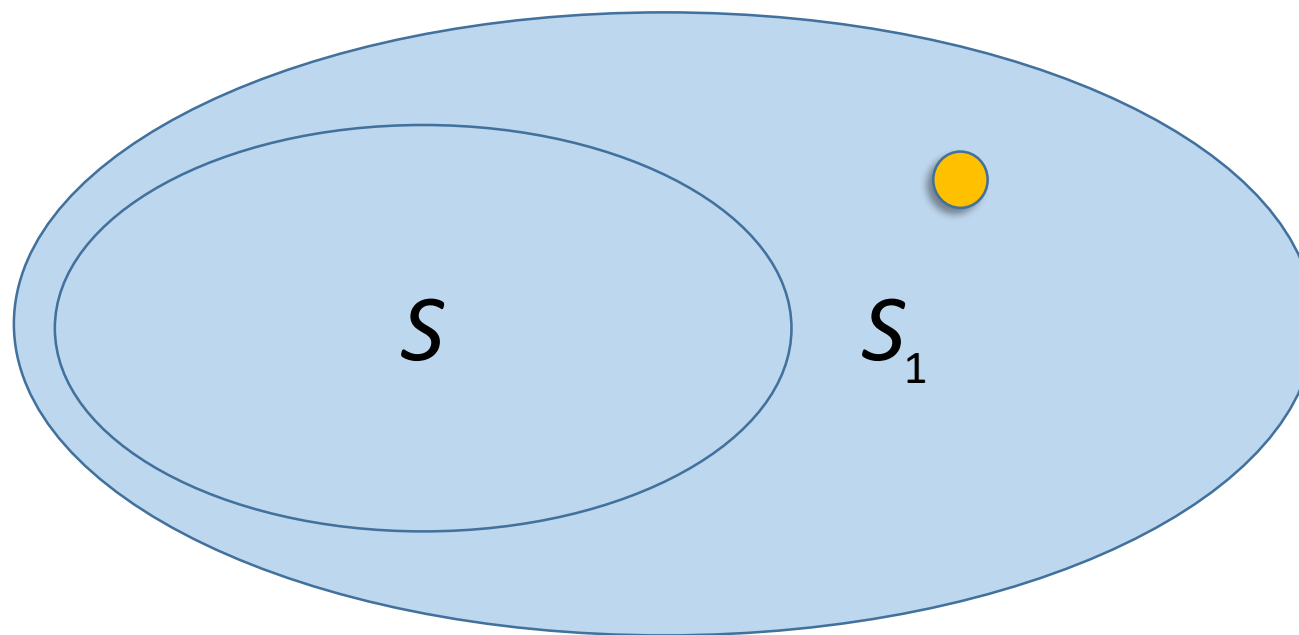
Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



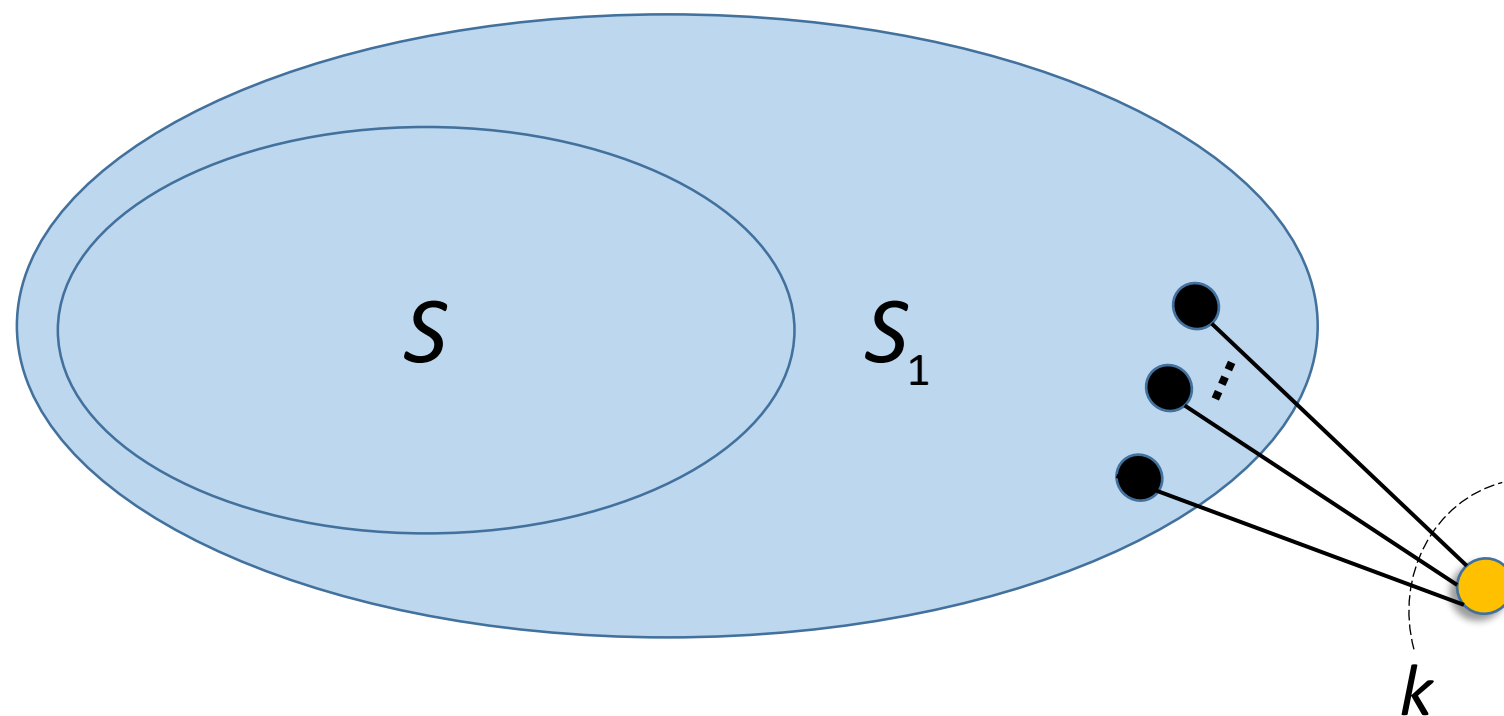
Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



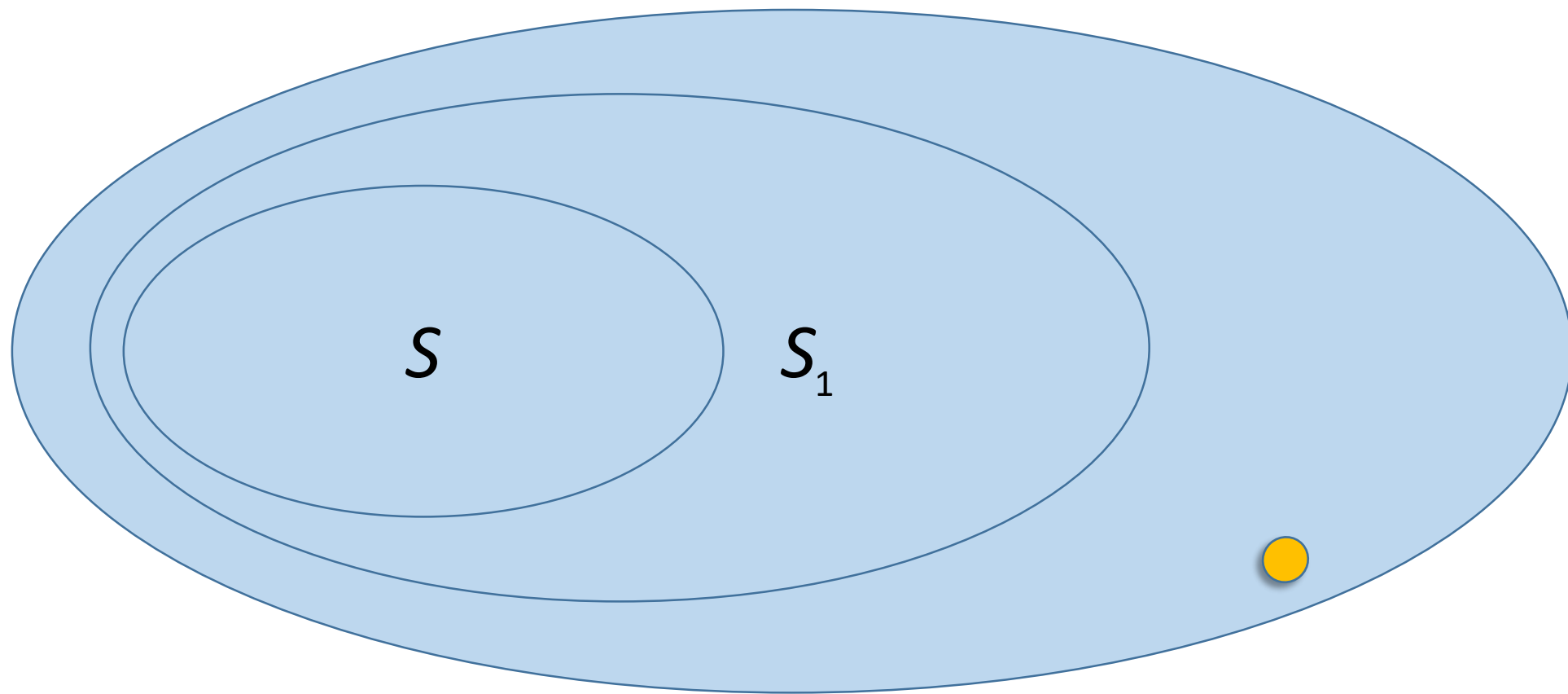
Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos



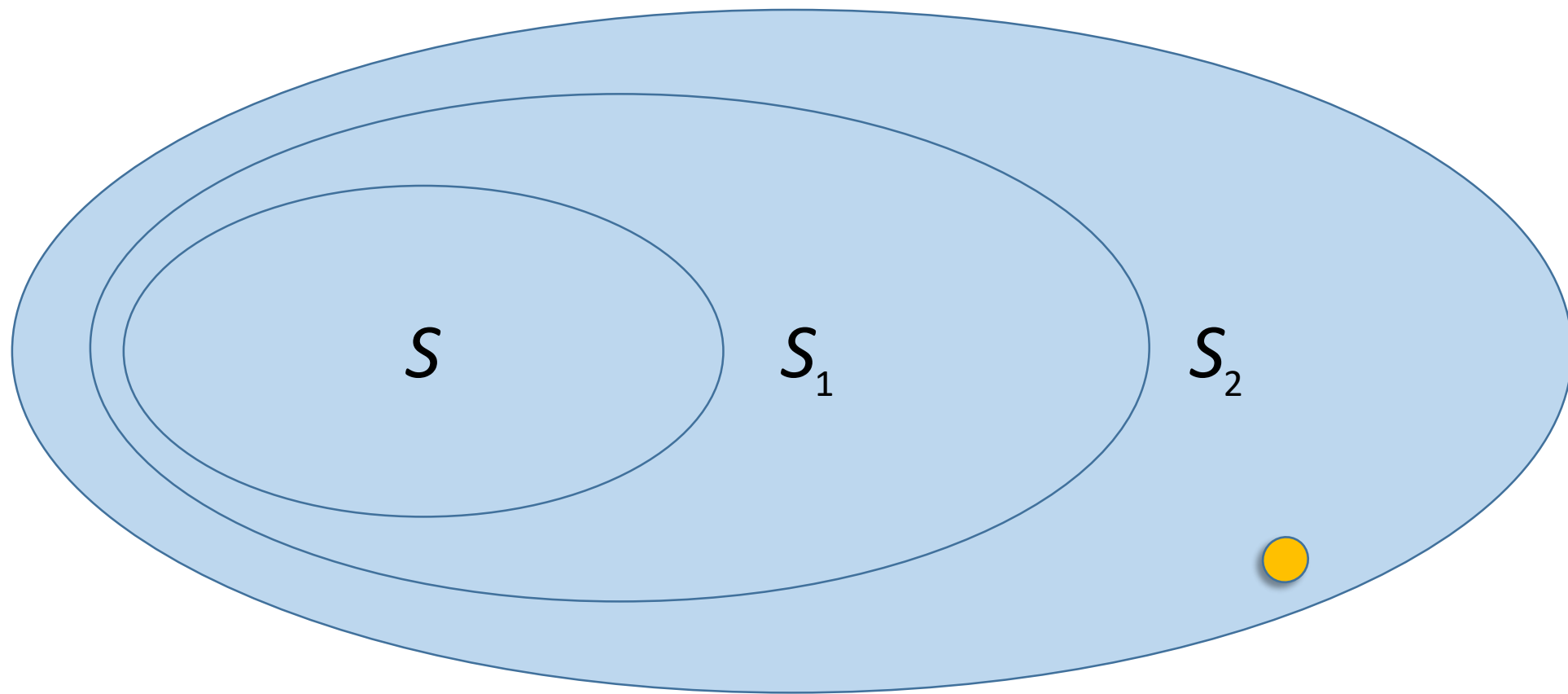
Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



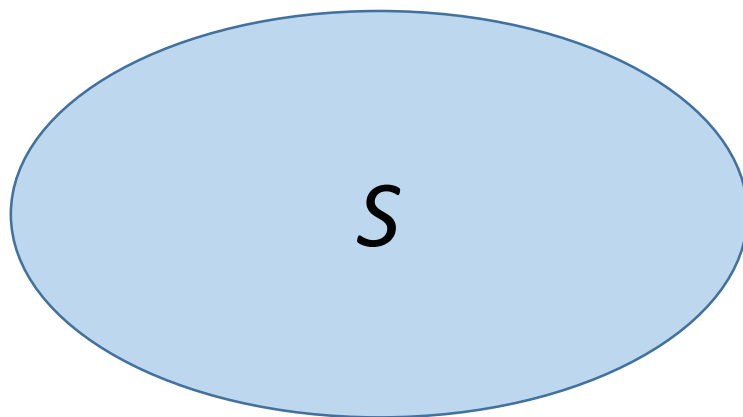
Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos



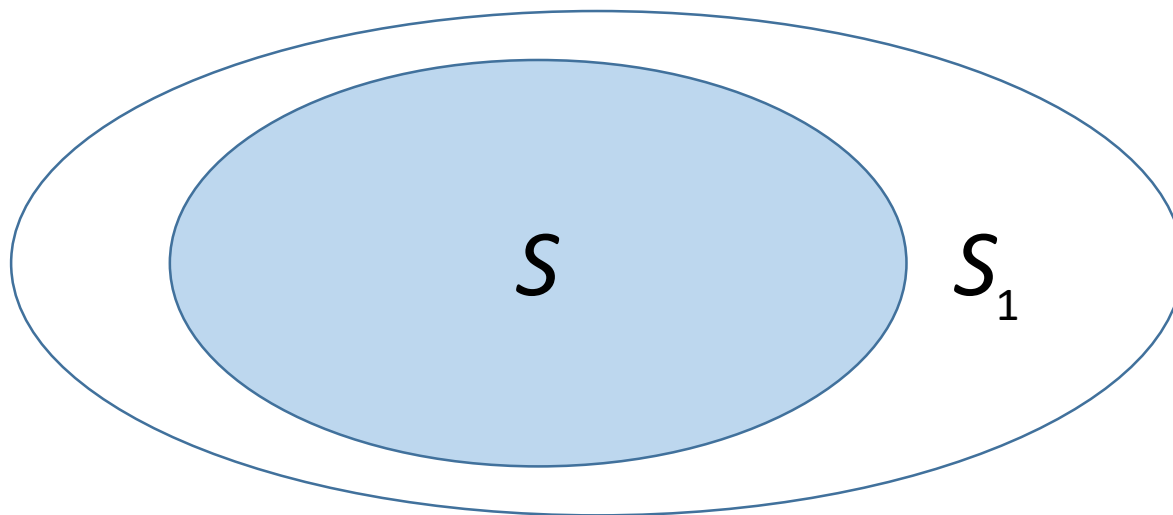
Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos



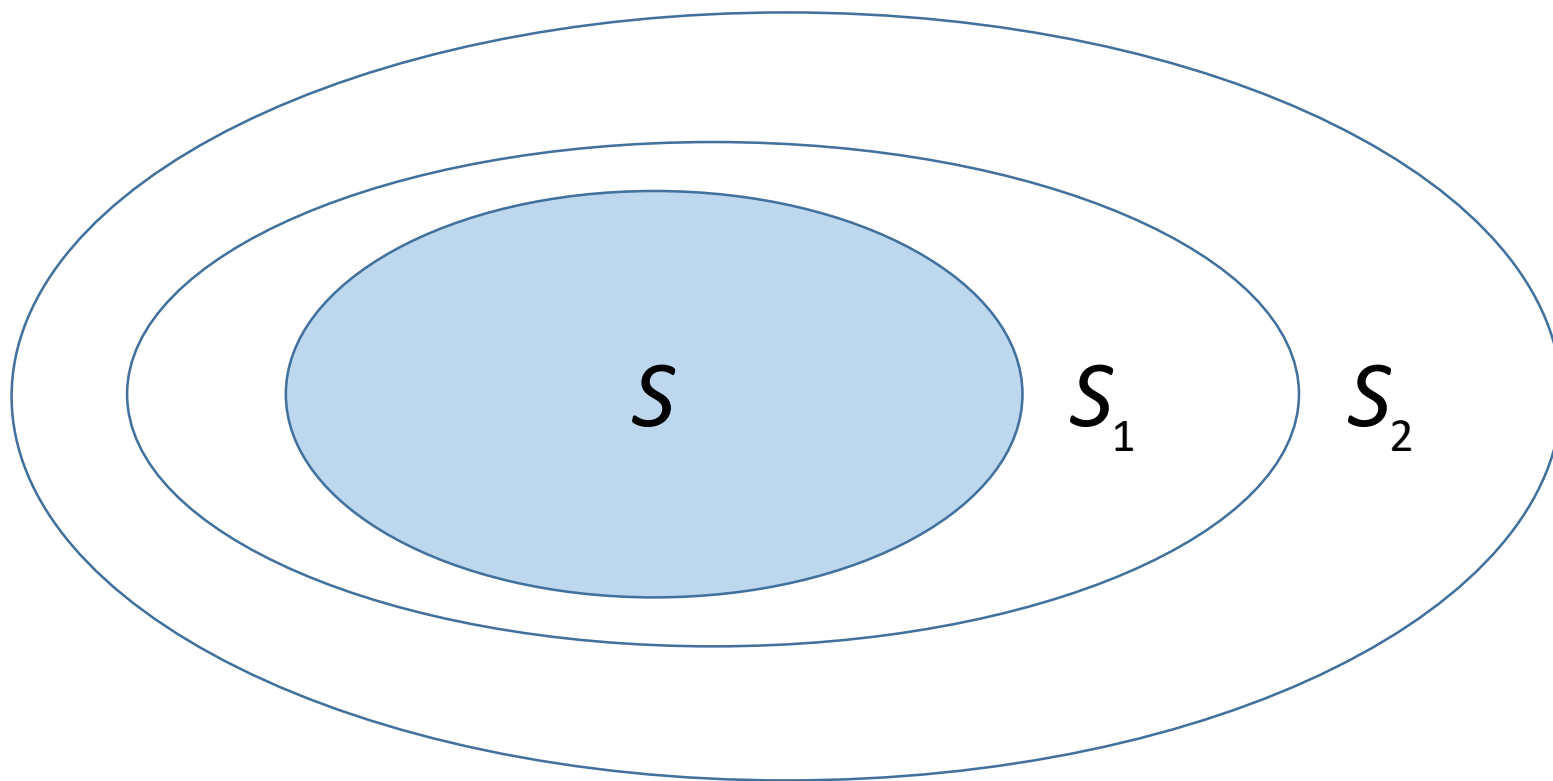
Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos



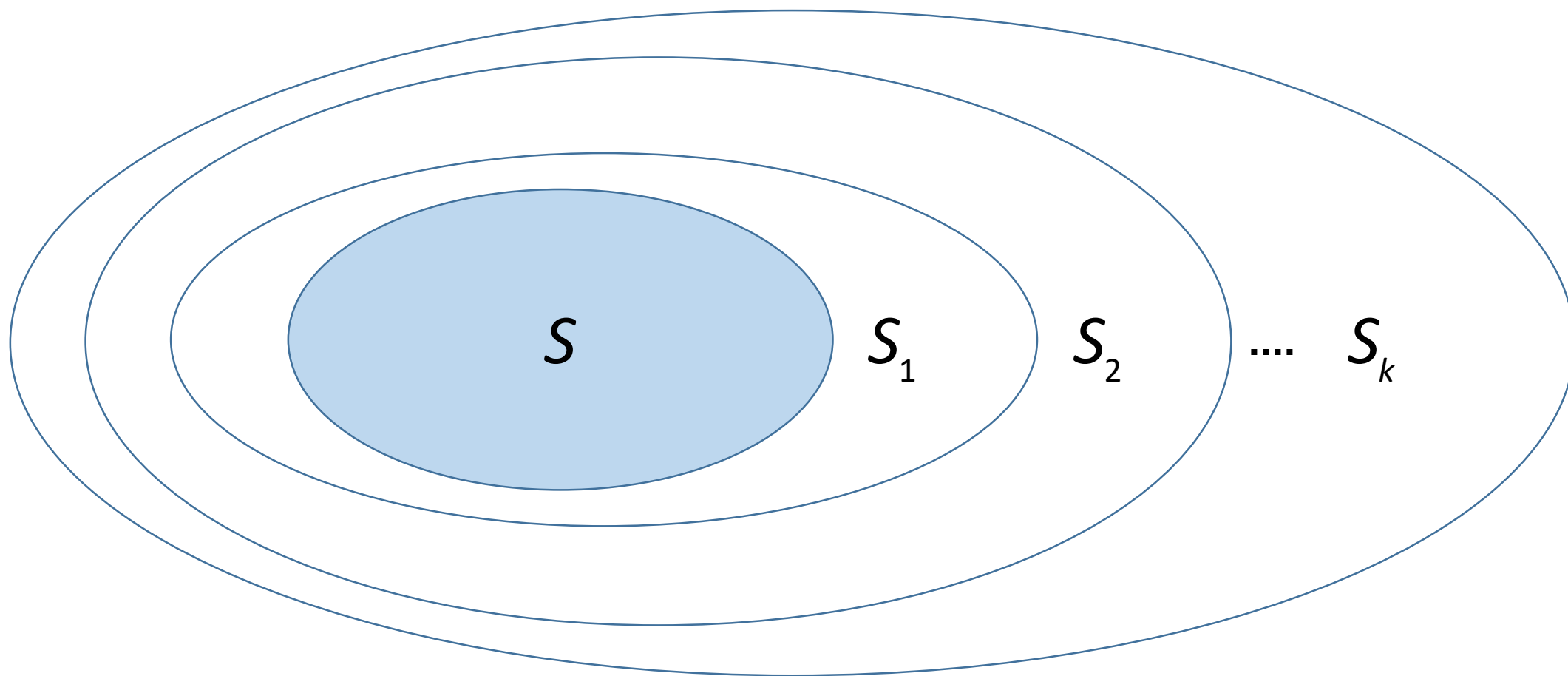
Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



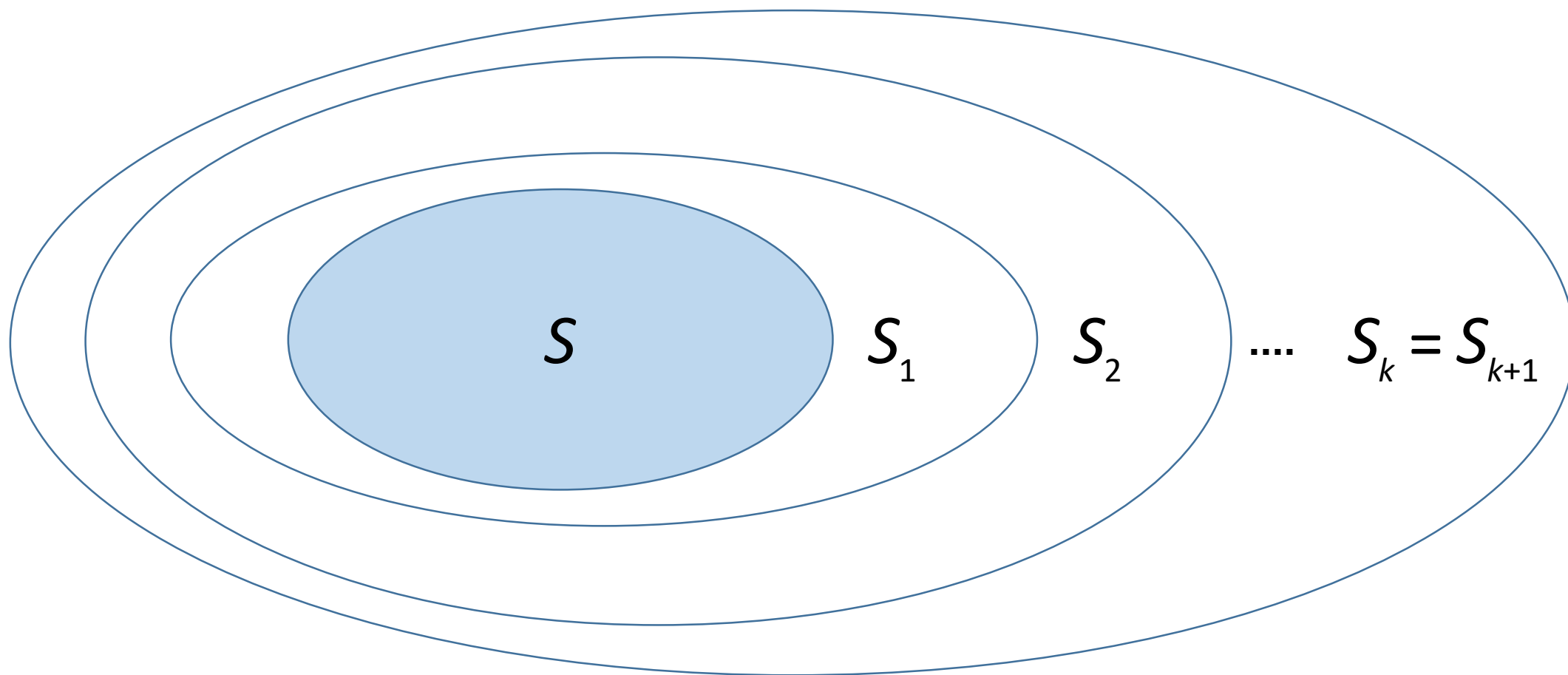
Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos



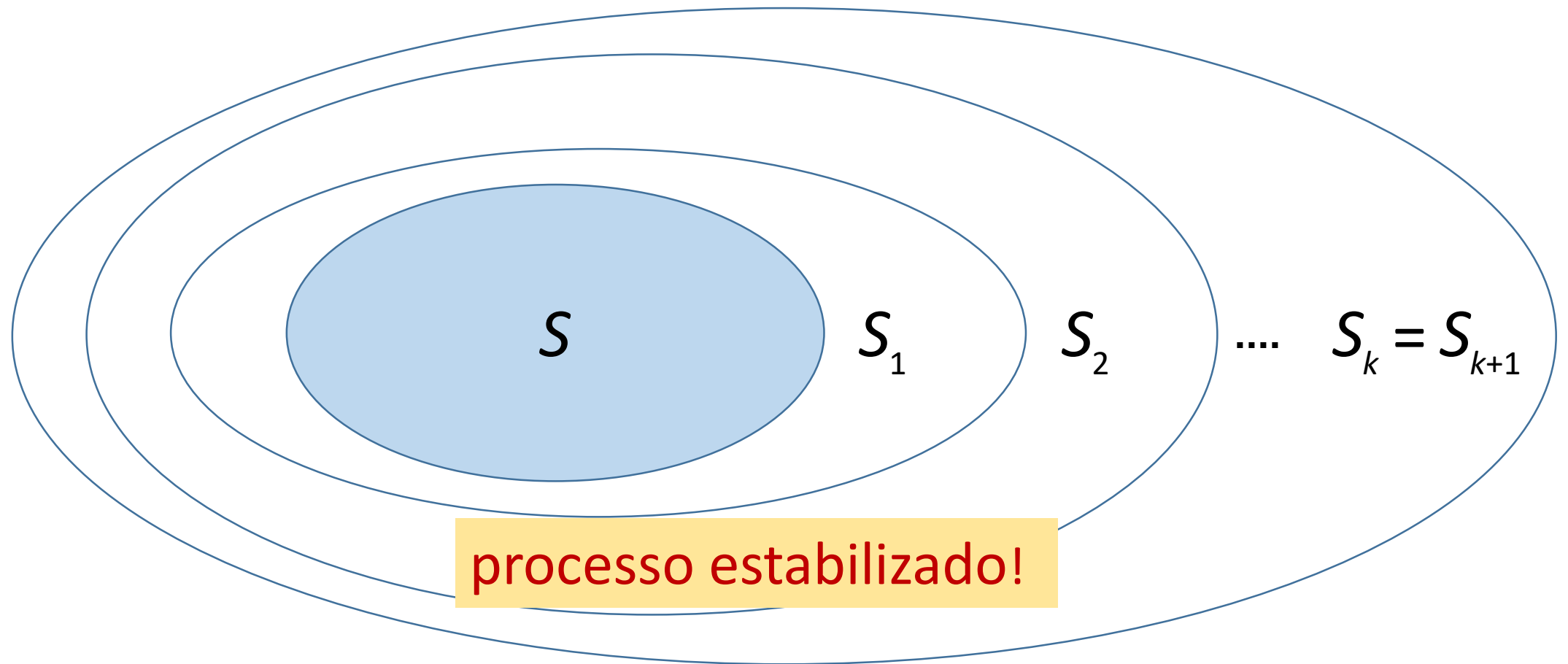
Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos



Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos

- $I(S) = \{ v \in V(G) : |N(v) \cap S| \geq k \}$
- $S_1 = I(S) = I^1(S)$
- $S_2 = I(S_1) = I^2(S)$
- $S_3 = I(S_2) = I^3(S)$
- ...
- $S_k = I(S_{k-1}) = I^k(S)$
- $S_{k+1} = I(S_k) = S_k$
- $S_k = H(S)$

Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos

➤ $I(S) = \{ v \in V(G) : |N(v) \cap S| \geq k \}$

➤ $S_1 = I(S) = I^1(S)$

➤ $S_2 = I(S_1) = I^2(S)$

➤ $S_3 = I(S_2) = I^3(S)$

➤ ...

➤ $S_k = I(S_{k-1}) = I^k(S)$

➤ $S_{k+1} = I(S_k) = S_k$

➤ $S_k = H(S)$



regra de iteração
ou
operador intervalar

Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos

$$S \subseteq I(S) = S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_k = H(S)$$



S = conjunto
inicial

Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos

$$S \subseteq I(S) = S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_k = H(S)$$

S = conjunto
inicial

$I(S)$ = intervalo de S

Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos

$$S \subseteq I(S) = S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_k = H(S)$$

S = conjunto
inicial

$I(S)$ = intervalo de S

k = número
de iterações

Disseminação de opinião: convexidade de vizinhanças com k elementos

$$S \subseteq I(S) = S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_k = H(S)$$

S = conjunto inicial

$I(S)$ = intervalo de S

k = número de iterações

$H(S)$ = envoltória convexa de S

Disseminação de opinião:
convexidade de vizinhanças com k elementos

S é convexo



$$S = I(S) = H(S)$$

Problemas computacionais: convexidade de vizinhanças com k elementos

- Dado um conjunto S , computar o intervalo $I(S)$
 - ✓ solucionável em tempo polinomial
- Dado um conjunto S , computar a envoltória $H(S)$
 - ✓ solucionável em tempo polinomial
- Dado um grafo G , encontrar um conjunto S mínimo tal que $I(S)=V(G)$ [Problema da k -Dominação]
 - ! NP-difícil
- Dado um grafo G , encontrar um conjunto S mínimo tal que $H(S)=V(G)$ [Target Set Selection Problem]
 - ! NP-difícil

Estratégias para o tratamento de problemas NP-difíceis

- Algoritmos combinatórios com garantia de aproximação
- Algoritmos probabilísticos
- Algoritmos experimentais
 - Heurísticas construtivas
 - Heurísticas baseadas em meta-heurísticas
 - GRASP, ILS, ACO, Algoritmos Genéticos...
- Métodos exatos
 - Programação Linear Inteira
- Métodos híbridos

Problema da Seleção de Conjunto-Alvo Ponderado [Weighted Target Set Selection Problem]

➤ Dados de entrada:

- rede social representada como um grafo G
- custos não negativos c_i , para todos os nós v_i de G
- *thresholds* t_i , para todos os nós v_i de G

➤ Objetivo:

encontrar um conjunto-alvo S de custo mínimo
(a cada iteração k , são incluídos em S_k todos os nós v_i
que tenham t_i vizinhos em S_{k-1})

➤ Caso particular:

$c_i = 1$ e $t_i = \text{constante}$, para todo nó v_i de G

Problema da Seleção de Conjunto-Alvo Ponderado

Formulação em Programação Linear Inteira

- constante binária $\delta_{i,j}$ tal que:
 - $\delta_{i,j} = 1$, se v_i e v_j são nós vizinhos
 - $\delta_{i,j} = 0$, caso contrário
- variável binária x_i para cada nó v_i de G tal que:
 - $x_i = 1$, se v_i pertencer ao conjunto-alvo S
 - $x_i = 0$, caso contrário
- variável binária $y_{i,k}$ com o seguinte significado:
 - $y_{i,k} = 1$, se v_i pertence a S_k
(v_i foi alcançado pela disseminação na iteração k)
 - $y_{i,k} = 0$, caso contrário

Problema da Seleção de Conjunto-Alvo Ponderado

Formulação em Programação Linear Inteira

minimizar $\sum_{i=1}^n c_i x_i$

s.a.

$$y_{i,0} = x_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$y_{i,k} \geq y_{i,k-1} \qquad 1 \leq i, k \leq n$$

$$y_{i,n} = 1 \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$y_{i,k} \leq y_{i,k-1} + \frac{1}{t_i} \sum_{j=1}^n (y_{j,k-1} \delta_{i,j}) \qquad 1 \leq i, j, k \leq n$$

Problema da Seleção de Conjunto-Alvo Ponderado

Formulação em Programação Linear Inteira

➤ Abordagem:

- Escolher um conjunto de instâncias representativas
- Submetê-las a um algoritmo experimental
- Comparar as soluções experimentais com as soluções ótimas obtidas utilizando um “solver” para a formulação em PLI
- Comparar os tempos computacionais dos dois métodos

Problema da Seleção de Conjunto-Alvo Ponderado

Formulação em Programação Linear Inteira

Name	# of vert.	# of edges	Max deg	Diam.	Size of the LCC	Triangles	Clust Coeff	Modul.
Amazon0302 [29]	262111	1234877	420	32	262111	717719	0.4198	0.6697
BlogCatalog [38]	88784	4186390	9444	–	88784	51193389	0.4578	0.3182
BlogCatalog2 [38]	97884	2043701	27849	5	97884	40662527	0.6857	0.3282
BlogCatalog3 [38]	10312	333983	3992	5	10312	5608664	0.4756	0.2374
BuzzNet [38]	101168	4284534	64289	–	101163	30919848	0.2508	0.3161
ca-AstroPh [29]	18772	198110	504	14	17903	1351441	0.6768	0.3072
ca-CondMath [29]	23133	93497	279	14	21363	173361	0.7058	0.5809
ca-GrQc [29]	5242	14496	81	17	4158	48260	0.6865	0.7433
ca-HepPh [29]	10008	118521	491	13	11204	3358499	0.6115	0.5085
ca-HepTh [29]	9877	25998	65	17	8638	28399	0.5994	0.6128
Douban [38]	154907	327162	287	9	154908	40612	0.048	0.5773
Facebook [29]	4039	88234	1045	8	4039	1612010	0.6055	0.8093
Flickr [38]	80513	5899822	5706	–	80513	271601126	0.1652	–
Hep [29]	27770	352807	64	13	24700	1478735	0.3120	0.7203
Last.fm [38]	1191812	5115300	5140	–	1191805	3946212	0.1378	–
Livemocha [38]	104438	2196188	2980	6	104103	336651	0.0582	0.36
Power grid [33]	4941	6594	19	46	4941	651	0.1065	0.9306
Youtube2 [38]	1138499	2990443	28754	–	1134890	3056537	0.1723	0.6506

Problema da Seleção de Conjunto-Alvo Ponderado

Formulação em Programação Linear Inteira

- Cordasco, G., Gargano, L., Rescigno, A. A., & Vaccaro, U. (2015). Optimizing Spread of Influence in Weighted Social Networks via Partial Incentives.
- Chun-Ying Chiang , Liang-Hao Huang , Bo-Jr Li, Jiaojiao Wu, Hong-Gwa Yeh (2011). Some Results on the Target Set Selection Problem.
- Cheng Wang, Lili Deng, Gengui Zhou, Meixian Jiang (2014). A Global Optimization Algorithm for Target Set Selection Problems.