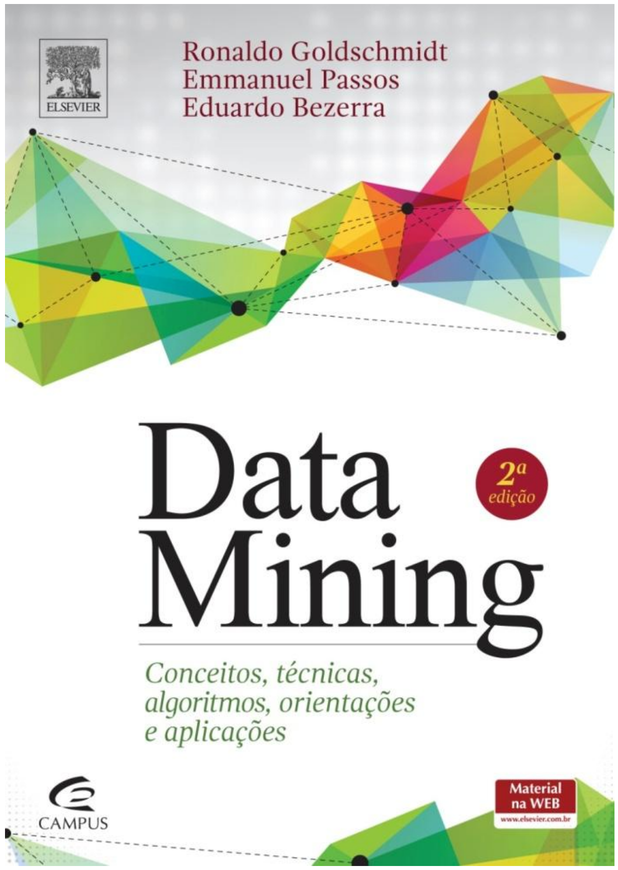


Complemento III – Noções Introdutórias em Lógica Nebulosa

Esse documento é parte integrante do material fornecido pela WEB para a 2ª edição do livro ***Data Mining: Conceitos, técnicas, algoritmos, orientações e aplicações***.

Visão Geral

A Lógica Nebulosa (Fuzzy Logic, em inglês) é uma teoria matemática que tem como principal objetivo permitir a modelagem do modo aproximado de raciocínio, imitando a habilidade humana de tomar decisões em ambientes de incerteza e imprecisão. Com conceitos e recursos da Lógica Nebulosa pode-se construir sistemas inteligentes de controle e suporte à decisão que lidem com informações imprecisas e subjetivas, tais como:

- Investimento de alto risco
- Pressão média
- Fluxo muito intenso
- Temperatura alta
- Muito jovem

São todas expressões linguísticas cuja interpretação pode variar de um indivíduo para outro, sendo portanto, expressões nebulosas.

Como exemplos de aplicações industriais e comerciais da Lógica Nebulosa, podem ser citados:

- Aparelhos de Refrigeração
- Filmadoras
- Freios Antiderrapantes
- Sistema de Análise de Crédito
- Detecção de Fraude em Seguradoras
- Sistema de Análise de Investimentos
- Dentre muitos outros...

Para uma melhor compreensão dos fundamentos e das aplicações da Lógica Nebulosa, seus principais conceitos são definidos a seguir e comparados com conceitos da Lógica Clássica e da tradicional Teoria de Conjuntos.

Conjuntos Nebulosos

Existem três formas de se definir conjuntos na Teoria de Conjuntos:

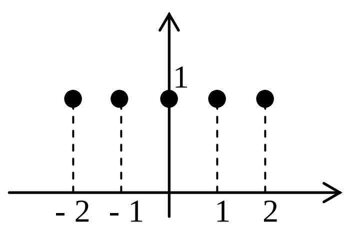
a) Representação Explícita - Enumerando todos os elementos que pertencem ao conjunto. Por exemplo: A= {-2,-1, 0, 1, 2}

b) Representação Implícita – Descrevendo uma lei de formação do conjunto, ou seja, indicando as propriedades dos elementos que pertencem ao conjunto. Por exemplo, A= {X € Z / |x| ≤ 2}

c) Representação pela Função Característica – A função característica de um conjunto A, $X_A : U \rightarrow \{0,1\}$, é uma função que associa a cada elemento do universo de discurso U um valor binário. Este valor indica se o elemento pertence (1) ou não pertence (0) ao conjunto A.

$$X_A\ (x) = \begin{cases} 0, se..X \notin A \\ 1, se..X \in A \end{cases}$$

O gráfico de função característica associada ao conjunto A dos exemplos anteriores seria:



Segundo a Lógica Clássica uma sentença só pode assumir um dentre os valores verdade: Verdadeiro ou Falso. Analogamente, um elemento pertence ou não pertence a um conjunto. Não existe situação intermediária. Nesta teoria, os conjuntos e as regras são rígidos.

Consideremos os seguintes conjuntos como exemplos:

Muito Jovem= {x é pessoa/ idade (x) < 10}

Jovem= {x é pessoa/ 10 ≤ idade (x) < 40}

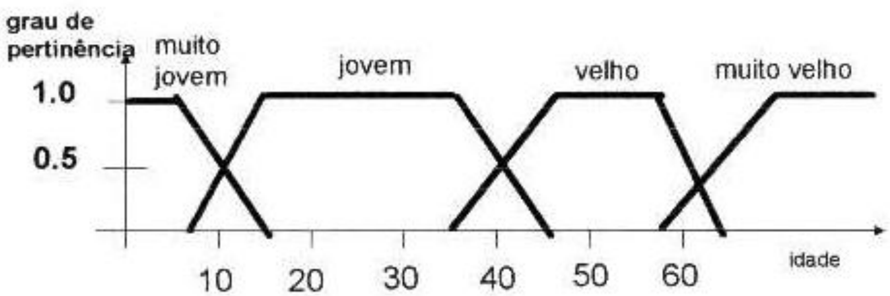
Velho= {x é pessoa/ 40 ≤ idade (x) < 60}

Muito Velho= {x é pessoa/ idade (x) ≥ 60}

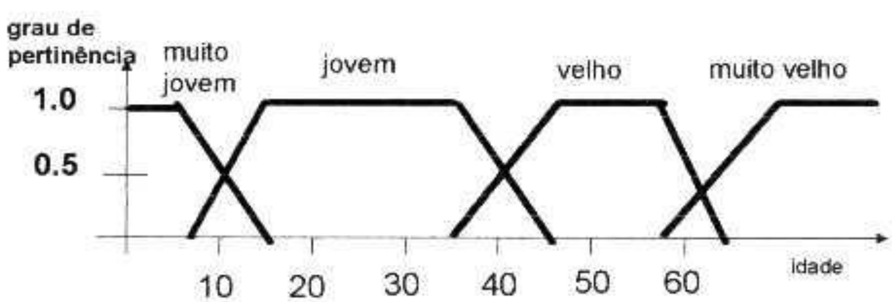
José e João têm respectivamente 39 e 40 anos. Segundo os conceitos definidos pelos conjuntos acima, José é considerado jovem e João velho. Há uma mudança muito abrupta de um conceito (jovem) para o outro (velho).

A Lógica Nebulosa, assim como a Teoria dos Conjuntos Nebulosos, busca introduzir mecanismos que tornem mais suave a transição entre conceitos. Um deles é a função de pertinência μ_A: x →[0,1] que expressa o quanto um elemento “x” pertence ao conjunto “A”. μ_A (x_0) é o grau de pertinência do elemento x_0 ao conjunto A. O grau de pertinência μ_A (x_0) indica o quão o valor x_0 é compatível como o conceito representado pelo conjunto A. Quanto maior μ_A (x_0) for de 1, significa maior compatibilidade de x_0 ao conceito A. Por outro lado, quanto menos compatível x_0 for em relação ao conceito A, menor será μ_A (x_0). A é um conjunto nebuloso.

A figura abaixo mostra quatro exemplos de conjunto nebulosos construídos em função da variável “Idade”. Todos os conjuntos apresentam o formato de trapézios.



Pode-se perceber pelo exemplo que uma pessoa que possua 40 anos, por exemplo, pertence ao mesmo tempo aos conjuntos jovem e velho, com graus de pertinência 0,65 e 0,45, respectivamente.



$\mu_{\text{velho}}(40) = 0{,}45$ $\mu_{\text{muito jovem}}(40) = 0$

$\mu_{\text{jovem}}(40) = 0{,}65$ $\mu_{\text{muito velho}}(40) = 0$

A pessoa em questão é simultaneamente jovem e velha. Pelos graus de pertinência, observa-se que ela não é nem tão jovem e nem tão velha.

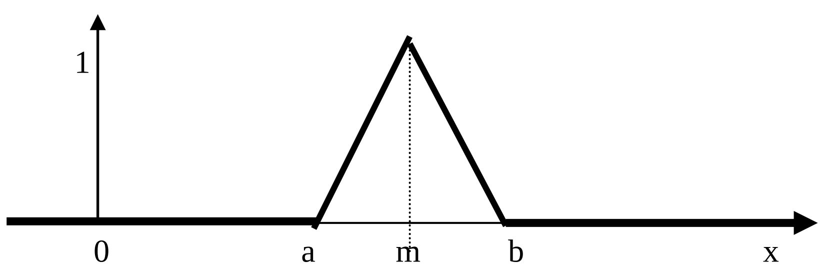
Existem diversos formatos para a representação de conjuntos nebulosos. A escolha de um determinado formato deve ser norteada pela compatibilidade do formato com o conceito que se deseja representar.

Fogem do escopo deste material a apresentação e análise destes formatos. Merecem destaque, no entanto, os formatos triangular e trapezoidal, que são muito utilizados em diversas aplicações da Lógica Nebulosa.

Uma função de pertinência triangular é expressa pela fórmula:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0,..se..x \le a \\ (x-a)/(m-a),..se..x. \in .]a, m[\\ (b-x)/(b-m),..se..x. \in .[m, b[\\ 0,..se..x \ge b \end{cases}$$

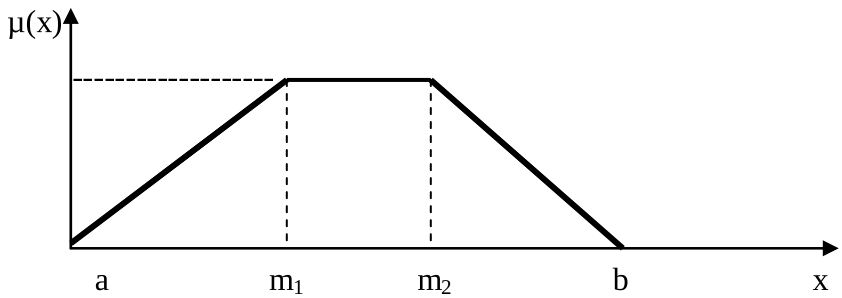
Onde:



Uma função de pertinência trapezoidal é expressa por:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, se..x \leq a \\ (x-a)/(m_1 - a), se..x \in]a, m_1[\\ ....1, se..x \in .[m_1, m_2] \\ (b-x)/(b-m_2), se..x \in]m_2, b[\\ 0, se..x \geq b \end{cases}$$

Onde:



Operadores Nebulosos

Nesta seção são apresentadas algumas operações sobre conjuntos nebulosos. Todas possuem correspondentes na clássica Teoria de Conjuntos.

Sejam A e B dois conjuntos nebulosos:

a) A função de pertinência do operador nebuloso de interseção, denominado T-Norm, pode ser definida de diversas maneiras. Abaixo estão dois dos exemplos mais usuais:

- $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ (Mínimo)

- $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$ (Produto)

Assim como na Lógica Clássica, a operação de interseção corresponde ao operador lógico de conjunção “E”.

c) A função de pertinência do operador nebuloso de união, denominado T-Conorm (ou S – norm), pode ser definida, por exemplo, como:

- $\mu_{A \cup B}(x) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ (Máximo)

- $\mu_{A \cup B}(x) = \min \{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$ (Soma Limitada)

  Assim como na Lógica Clássica, a operação de união corresponde ao operador lógico de disjunção "OU".

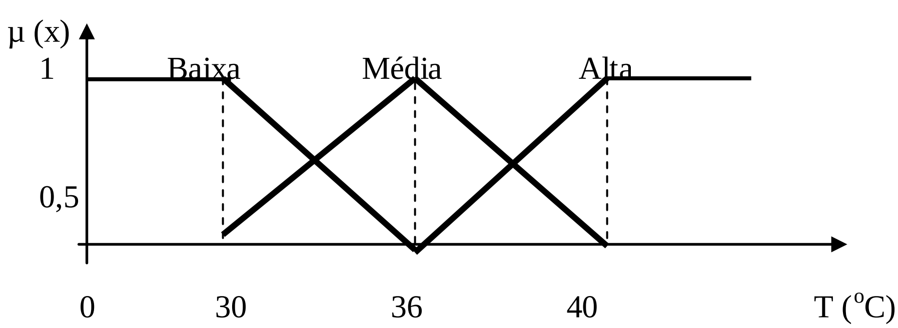
d) A função do operador nebuloso de complemento pode ser definida por:

- $\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$

  A operação de complemento corresponde ao operador lógico de negação "Não".

Os valores de uma variável linguística definem uma estrutura de conhecimento denominada de partição nebulosa desta variável.

A figura abaixo apresenta uma partição nebulosa possível para a variável temperatura.



Variáveis Linguísticas

Uma variável linguística é um objeto utilizado para representar de modo impreciso um conceito em um determinado problema. Seus valores são expressões linguísticas subjetivas tais como quente, alto, jovem. Variáveis linguísticas diferem das variáveis numéricas, que admitem apenas valores precisos. Os valores de uma variável linguística são conjuntos nebulosos.

Exemplo: Variável Numérica: Temperatura = 40º
Variável Linguística: Temperatura Alta

Regras Nebulosas

Uma das formas de representação nebulosa do conhecimento mais comum é a representação por meio de regras de produção nebulosas, ou simplesmente regras nebulosas. A estrutura geral de uma regra nebulosa é expressa por uma implicação do tipo:

<u>Se</u> < antecedente nebuloso> <u>Então</u> <conseqüente nebuloso>

O antecedente nebuloso é formado por condições nebulosas que, quando satisfeitas, determinam o processamento do conseqüente por um mecanismo de inferência nebulosa.

O conseqüente nebuloso, por sua vez, é composto por um conjunto de ações nebulosas ou diagnósticos nebulosos que são gerados a partir do disparo da regra.

Uma condição nebulosa, assim como uma ação ou diagnóstico nebuloso, é um predicado que envolve uma variável linguística e um conjunto nebuloso.

Exemplos de regras nebulosas:

SE idade é *meia-idade* **E** pressão é *baixa* **ENTÃO** seguro é *baixo*
SE idade é *jovem* **E** pressão é *alta* **ENTÃO** seguro é *alto*

Arquitetura Funcional de um Sistema de Inferência Nebuloso

Embora existam vários modelos de Inferência Nebulosa, por limitações de espaço será descrito aqui apenas o modelo Mamdani que foi, durante muitos anos, um padrão para a aplicação dos conceitos de Lógica Nebulosa em processamento de conhecimento.

Abaixo encontra-se a forma geral de uma regra típica do modelo Mamdani:

Se $X_1 = A_1$ **e** ... **e** $X_n = A_n$
Então $Y_1 = B_1$ **e** ... **e** $Y_m = B_m$

A próxima figura apresenta a arquitetura funcional genérica de um sistema de inferência nebuloso.

Para melhor compreensão do funcionamento desta arquitetura, considere o seguinte exemplo de um sistema nebuloso para definição do valor de apólice de seguro de vida de clientes de uma seguradora.

- Variáveis linguísticas e respectivos conjuntos nebulosos:

Variáveis	Tipo	Conjuntos Nebulosos
Idade	Entrada	Meia Idade / Jovem
Pressão	Entrada	Alta / Baixa
Seguro	Saída	Alta / Baixa

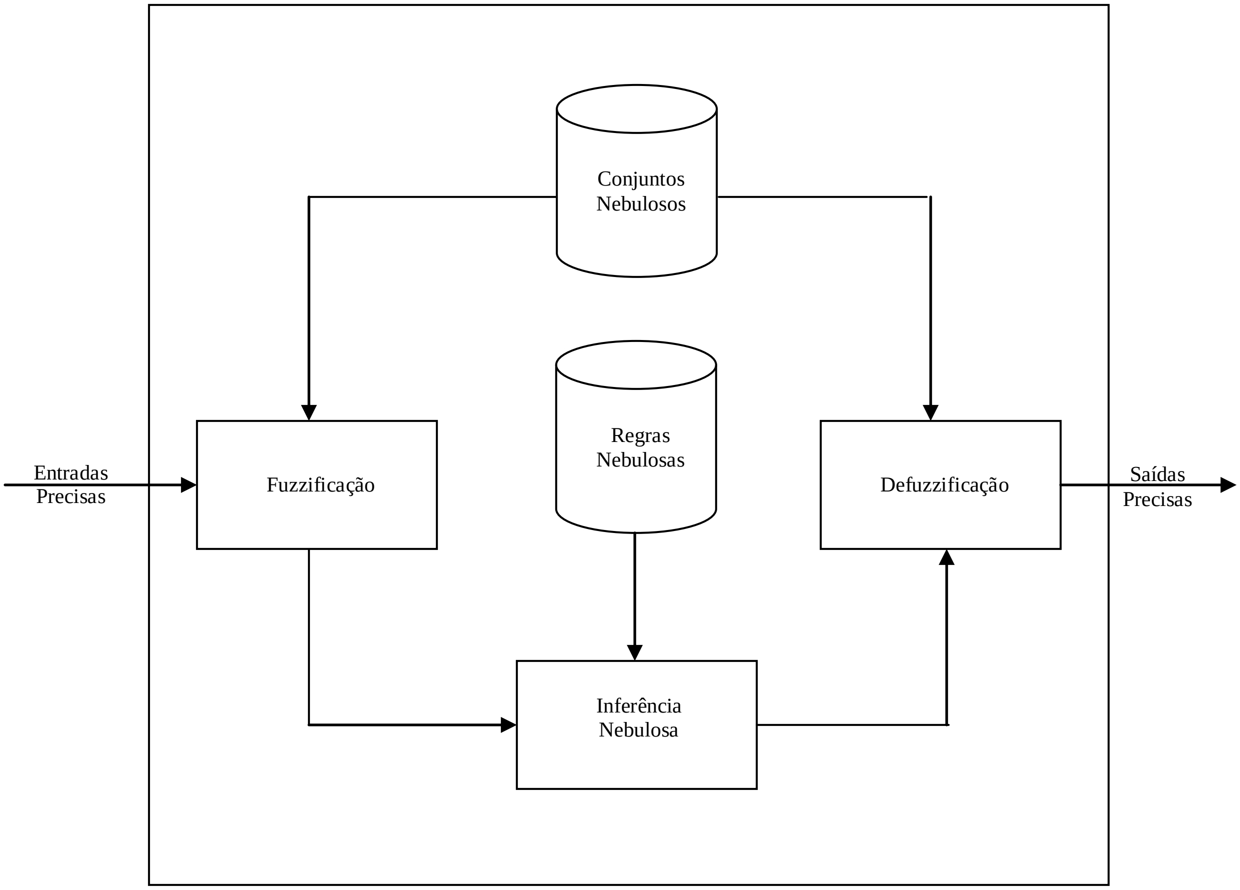


Figura: Arquitetura Funcional Genérica de um Sistema Nebuloso

- Conjuntos nebulosos (com representação tabular)

Idade	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Meia-Idade	0.3	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0	0.8	0.6	0.3	0.1
Jovem	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0

Pressão Máx.	95	100	110	120	130	140	150	160	170	175
Pressão Mín.	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
Alta	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Baixa	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1

Seguro	300	500	700	800	900	1000	1200
Alto	0.1	0.3	0.4	0.5	0.8	0.9	1.0
Baixo	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

- Regras Nebulosas (apenas duas para simplificar o exemplo)
  SE idade é *meia-idade* **E** pressão é *baixa* **ENTÃO** seguro é *baixo*
  SE idade é *jovem* **E** pressão é *alta* **ENTÃO** seguro é *alto*

Deseja-se neste exemplo, determinar qual o valor da apólice de seguro a ser pago pelo cliente a partir dos valores de idade e de pressão deste cliente.

As entradas e as saídas do sistema devem ser valores escalares, precisos. Considere, que desejamos saber qual o valor da apólice de seguro a ser paga pelo cliente João de 35 anos e pressão (130,70).

O primeiro módulo da arquitetura (fuzzificação) é responsável por identificar os graus de pertinência dos valores de entrada em relação aos conjuntos nebulosos correspondentes.

No exemplo:

Idade	Pressão
$\mu_{\text{meia idade}}(35) = 0.8$	$\mu_{\text{Allta}}(130,70) = 0.5$
$\mu_{\text{jovem}}(35) = 0.6$	$\mu_{\text{Baixa}}(130,70) = 0.6$

Em seguida, o módulo de inferência nebulosa, baseado nos graus de pertinência identificados anteriormente, processa as regras nebulosas existentes na base de conhecimento.

O processamento de cada regra envolve o cálculo da interseção entre os conjuntos indicados no antecedente da regra. Este processo gera um grau de pertinência de disparo para cada regra.

No exemplo:

Regra 1:

Se idade é meia-idade (0.8) e pressão é baixa (0.6) Então seguro é baixo (grau de disparo da regra = Min {0,8;0,6}= 0,6)

Assim, por esta regra o seguro é baixo com grau de pertinência 0.6

Regra 2:

Se idade é jovem (0.6) e pressão é alta (0.5) Então seguro é alto (grau de disparo da regra = Min{0.6, 0.5}=0.5)

Assim, por esta regra, o seguro é alto com grau de pertinência 0.5.

Finalizando, o processo de "defuzzificação" transforma os conjuntos acima em uma saída precisa. Para tanto, primeiro identifica o valor de seguro associado ao grau de disparo de cada regra:

Sendo: $\mu_{alto}(X) = 0,5$ e $\mu_{baixo}(Y) = 0,6$

Portanto: X=800 e Y=700

Em seguida, aplica-se a média ponderada aos valores de seguro indicados por cada regra e os respectivos graus de disparo:

$$\text{Seguro} = \frac{(0.5x800)+(0.6x700)}{0.5+0.6} = \frac{400+420}{1.1} = \frac{820}{1.1} = 745,45$$

Assim sendo, pelo sistema nebuloso exemplificado acima, um cliente de 35 anos com pressão 130x70 deve pagar uma apólice de seguro de R$ 745,45 (saída precisa).

Para saber mais

Caso o leitor deseje, maiores detalhes sobre Lógica Nebulosa e Sistemas Nebulosos podem ser obtidos nas seguintes referências recomendadas.

Oliveira, H., Caldeira, A., Machado M., Souza, R., Tanscheit, R. *Inteligência Computacional Aplicada à Administração, Economia e Engenharia em Matlab*. São Paulo: Thomson, 2007.

Rezende, Solange. *Sistemas Inteligentes – Fundamentos e Aplicações*. Barueri: Manole, 2003.

Pedrycz, Gomide. *An Introduction to Fuzzy Sets Analysis and Design*. MIT, 1998.