Intervalos de Confiança - Amostras Pequenas

Prof. Eduardo Bezerra

CEFET/RJ

21 de Setembro de 2018

Roteiro

1. Distribuição t de Student
2. Funções relevantes no R
3. Intervalos de confiança

Roteiro

1. Distribuição t de Student

2. Funções relevantes no R

3. Intervalos de confiança

Distribuição t de Student

- Quando o tamanho da amostra é pequeno ($n < 30$), não há bons métodos gerais para encontrar intervalos de confiança, nem para médias nem para proporções.
- No entanto, quando a população é aproximadamente normal, a distribuição t de Student pode ser usada para calcular os intervalos de confiança para uma média populacional.
- Vamos descrever essa distribuição e mostrar como usá-la.

Distribuição t

Caso o tamanho da amostra seja menor que 30 e a população seja aproximadamente normal, o intervalo de confiança deve ser calculado com o uso da estatística T:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

em que s é o estimador do desvio padrão populacional σ. Essa estatística tem distribuição t de Student, com $(n-1)$ graus de liberdade.

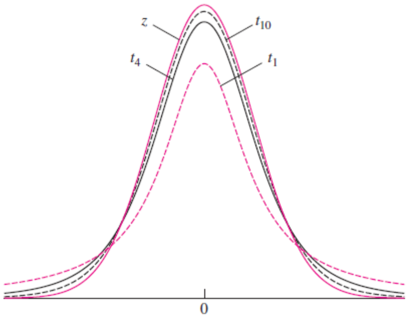
Distribuição t

Características da distribuição t de Student:

a) é simétrica em relação ao 0;
b) é semelhante à distribuição normal padrão, porém, apresenta maior espalhamento do que a normal padrão;
c) quando $n > 30$, a distribuição t tende para a normal padrão;
d) as curvas de t estão mais espalhadas do que a da normal padrão, mas o espalhamento diminui à medida que o número de graus de liberdade aumenta.

Distribuição t

Representação gráfica da fdp da curva t de Student para vários graus de liberdade. A curva normal padrão é também desenhada para comparação.



Roteiro

1. Distribuição t de Student
2. Funções relevantes no R
3. Intervalos de confiança

Função `qt`

qt(.95,30) retornará 1.69, que é o valor do percentil 95 desta distribuição.

Função `qt`

qt(.95,30) retornará 1.69, que é o valor do percentil 95 desta distribuição.

Esse valor significa que

- 95% de todos os números em nossa distribuição é inferior a $1,69$, e
- apenas 5% é maior.

O comando qt(.95,30) retorna o mesmo valor que seria produzido pela função inversa da CDF (*cumulative distribution function*).

Função pt

A chamada pt(1.69,30), retornará um resultado próximo de 95%. Esta função retorna a CDF, que é a probabilidade de obter um número menor ou igual ao argumento. Já que 1,69 corresponde ao 95^{o} percentil, o valor da CDF é de 95%.

Função `dt`

dt(x, 30) produzirá o valor da função de densidade de probabilidade em x.

Função `dt`

dt(x, 30) produzirá o valor da função de densidade de probabilidade em x.

Para $1,69$, o valor é $0,096$, que é bastante baixo, enquanto que para 0 é 50%.

Exercício 01

Encontre os percentis 2.5 e 97.5 da distribuição Student t com 5 graus de liberdade.

Exercício 01

Encontre os percentis 2.5 e 97.5 da distribuição Student t com 5 graus de liberdade.

Solução.

```
qt(c(.025, .975), df=5)
```

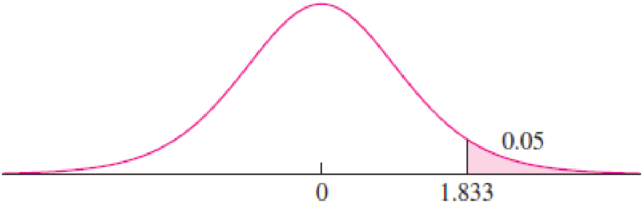
Exercício 02

Uma amostra aleatória de tamanho 10 é colhida a partir de uma população com distribuição normal com média 4. A estatística t de Student $t = (\overline{X} - 4)/(s/10)$ deve ser calculada. Qual é a probabilidade de que $t > 1,833$?

Exercício 02

Uma amostra aleatória de tamanho 10 é colhida a partir de uma população com distribuição normal com média 4. A estatística t de Student $t = (\overline{X} - 4)/(s/10)$ deve ser calculada. Qual é a probabilidade de que $t > 1,833$?

Solução.
Essa estatística t tem $10 - 1 = 9$ graus de liberdade. A partir da tabela t, $\Pr(t > 1,833) = 0,05$.



Exercício 03

Encontre o valor para a distribuição t_{12} cuja probabilidade da parte superior da cauda é 0,025.

Exercício 03

Encontre o valor para a distribuição t_{12} cuja probabilidade da parte superior da cauda é 0,025.

Solução. Basta procurar de cima para baixo na coluna intitulada $0,025$ para a linha correspondente a 12 graus de liberdade. O valor para t_{12} é então 2,179.

Exercício 04

Determine o valor para a distribuição t_{14} cuja probabilidade da cauda inferior é de 0,01.

Exercício 04

Determine o valor para a distribuição t_{14} cuja probabilidade da cauda inferior é de 0,01.

Solução. Basta procurar de baixo para cima na coluna intitulada $0,01$ pela linha correspondente a 14 graus de liberdade. O valor para t_{14} é 2,624. Este valor corta uma área, ou a probabilidade, de 1% na cauda superior. O valor cuja probabilidade da cauda inferior é de 1% é portanto -2,624.

Roteiro

1. Distribuição t de Student

2. Funções relevantes no R

3. Intervalos de confiança

Intervalos de confiança usando a distribuição t

Quando o tamanho da amostra é grande, não importa a distribuição da população para a determinação de uma estimativa para a média populacional,

- Isso porque o TLC garante que $\overline{X}$ será aproximadamente normalmente distribuída.

Porém, quando a amostra é pequena ($n \leq 30$), a distribuição da população deve ser aproximadamente normal para que se possa fazer estimativas adequadas.

- Nesse caso, intervalos de confiança são construídos de forma semelhante ao caso em que $n > 30$.
- A diferença é que o z-score é substituído por um valor da distribuição t de Student.

Procedimento geral

Para amostras pequenas, o procedimento geral para a determinação de intervalos de confiança para $\overline{X}$ é resumido a seguir.

Procedimento geral

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória pequena colhida de uma população normal cuja média é μ. Então um intervalo de confiança no nível $100(1-\alpha)\%$ para μ é

$$\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

em que $t_{n-1,\alpha/2}$ é o valor que corta uma área de $\alpha/2$ na cauda do lado direito da distribuição t.

Exercício 05

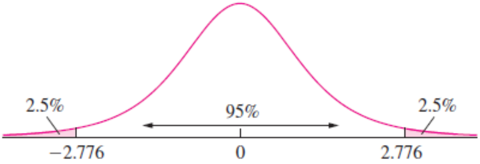
Um técnico em metalurgia está estudando uma novo processo de soldagem. Ele fabrica 5 juntas soldadas usando esse processo e mede a resistência à deformação de cada uma. Os cinco valores (em ksi) são

$$56,3 \quad 65,4 \quad 58,7 \quad 70,1 \quad 63,9$$

Suponha que esses valores são uma amostra aleatória de uma população aproximadamente normal. Determine um intervalo de confiança no nível de 95% para a resistência média das soldaduras forjadas nesse processo.

Exercício 05 - solução

A figura a seguir mostra a distribuição t_4. Por outro lado, 95% da área sob a curva está contida no intervalo $[-2,776; 2,776]$.



Segue-se que, para 95% de todas as amostras que poderiam ter sido escolhidas,

$$-2,776 < \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < 2,776$$

Exercício 05 - solução (cont)

Ao manipular essa desigualdade, acabamos por obter

$$\overline{X} - 2,776\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 2,776\frac{s}{\sqrt{n}}$$

A média e o desvio padrão da amostra são, respectivamente, $\overline{X} = 62,88$ e $s = 5,4838$. O tamanho da amostra é $n = 5$. Ao fazermos a substituição de valores, descobrimos que um intervalo de confiança de 95% para μ é

$$62,88 - 6,81 < \mu < 62,88 + 6,81$$

ou $(56,07; 69,69)$.

Exercício 06

Sabendo-se que uma amostra tem 25 elementos, que a sua média 150 e desvio padrão igual a 10. Represente um intervalo de confiança em nível de 90%.

Exercício 06 - solução

- Como a amostra é menor que 30 elementos, então iremos usar a distribuição t de Student. Se desejamos um intervalo de confiança de 90%, temos:
- Para determinar t, encontramos o número de graus de liberdade, que é $(n-1)$. Logo, $(25-1) = 24$.
- O nível de confiança desejado é $(1-\alpha) = 1 = 0,9 = 0,1$.
- Conhecendo o número de graus de liberdade e o nível de confiança, encontramos o valor t, neste caso igual a $1,7109$.

$$\overline{X} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$