Distribuição Normal

Prof. Eduardo Bezerra

(CEFET/RJ) - BCC - Inferência Estatística

16 de março de 2018

Roteiro

Roteiro

Definições iniciais - função densidade de probabilidade

Uma variável aleatória contínua tem função densidade de probabilidade $f(x)$ se f é uma função não-negativa integrável tal que a probabilidade no intervalo $[a,b]$ é dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

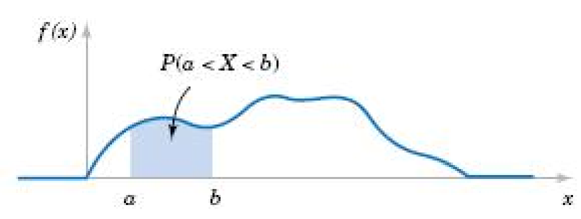
quaisquer que sejam a e b, e a probabilidade de todo o espaço amostral é 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

A função de densidade é zero para valores de x que não podem ocorrer e é considerada zero em pontos em que ela não for especificamente definida.

Definições iniciais - função densidade de probabilidade

A probabilidade de X estar entre a e b é igual à integral de $f(x)$ de a até b, isto é, igual à área sob a curva de $f(x)$ entre a e b.



$$\Pr(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Definições iniciais - função de distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua em um ponto x é definida como a integral da função de densidade deste $-\infty$ até o ponto x:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\ dy$$

Definições iniciais - valor esperado e variância

Para uma variável aleatória contínua X, seu valor esperado é definido pela integral de todos os valores da função $xf(x)$:

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

e sua variância é definida como

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \int (x - \mu)^2\, f(x)\, dx$$

Nas expressões acima, temos integrais definidas sobre o intervalo válido para X.

Roteiro

Distribuição normal

Fonte da figura: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Planche_de_Galton.jpg`

Distribuição normal

Uma variável aleatória contínua X é dita ter distribuição normal se sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Onde:

- π é a constante matemática ($\pi \approx 3{,}14159$).
- exp é a função exponencial $exp(y) = e^y$ ($e \approx 2{,}71828$).
- μ é a média da distribuição, denominado parâmetro de localização.
- σ é o desvio-padrão da distribuição, denominado parâmetro de forma (ou dispersão).

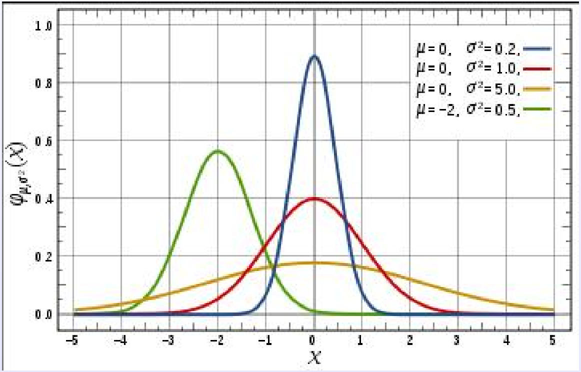
Distribuição normal

Outros dois termos associados à distribuição normal são

- curva do sino (*bell curve*), em razão da semelhança geométrica entre o gráfico da função de densidade e um sino.
- distribuição gaussiana, em homenagem a Carl Friedrich Gauss.

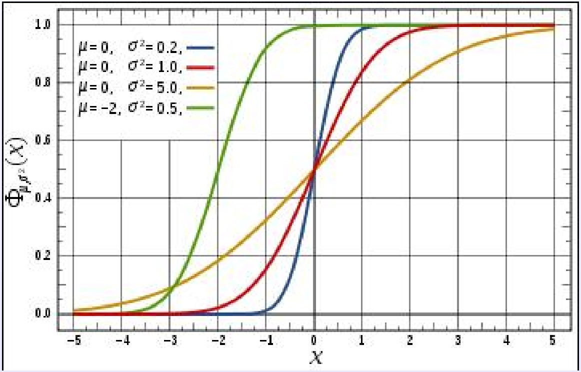
Distribuição normal

Gráficos de 4 funções de densidade para algumas combinações dos parâmetros μ e σ.



Distribuição normal

Gráficos de funções acumuladas para algumas combinações dos parâmetros μ e σ.

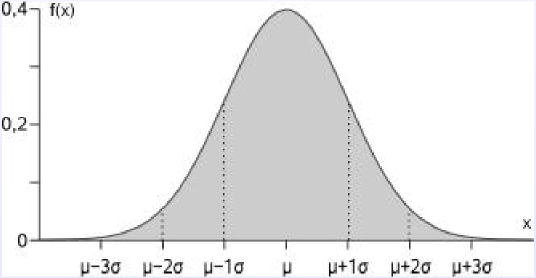


Distribuição normal

- A função de distribuição acumulada $F(X)$ de uma v.a. normal não possui uma forma fechada.
- Média:
$$\mathrm{E}(X) = \mu$$
- Variância:
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

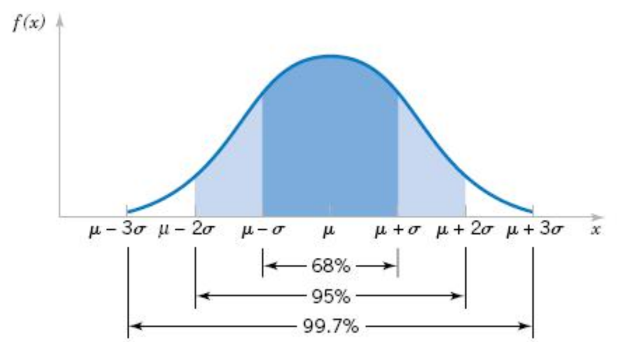
Distribuição normal padrão

Para uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, o gráfico da função de densidade de X é simétrico em relação à média μ (o que resulta em $\Pr(X > \mu) = \Pr(X < \mu) = 0{,}5$).



Distribuição normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a faixa $\mu \pm 3 \times \sigma$, ocorre a quase totalidade (99,73%) dos valores. Por esse motivo, o valor 6σ é denominado largura da distribuição normal.



Distribuição normal

As probabilidades associadas a distribuições gaussianas são obtidas de 2 maneiras alternativas:

1. Se as probabilidades são necessárias como parte de um programa de computador, a integral de $f(x)$ pode ser resolvida por algoritmos de cálculo numérico.
2. Se apenas algumas probabilidades são necessárias, então podemos fazer uso de **tabelas** para calculá-las. Essas tabelas são encontradas na maioria dos livros de estatística, e apresentam valores para $F(x) = \Pr(X < x)$.

Distribuição normal

- De acordo com as propriedades gerais aplicáveis a uma função de densidade qualquer,
    1) a área total sob a curva é igual a 1 porque indica a probabilidade de todo o espaço amostral.
    2) a área sob a curva entre dois valores quaisquer de X indica a probabilidade de seu valor estar entre esses valores.
- A análise da curva normal nos permite concluir que as ocorrências de X tendem a se concentrar em torno de μ e se tornam mais raras (i.e., menos prováveis) na medida em que dela se afastam.

Distribuição normal

- Por meio de integração numérica da função de densidade normal, é possível calcular a probabilidade de ocorrência em função do afastamento da média segundo o número de desvios-padrão.
- Os valores apresentados a seguir representam as probabilidades de se encontrar um valor de X na faixa respectiva.
  - 0,6827 ou 68,27% para a faixa $\mu \pm 1 \times \sigma$
  - 0,9545 ou 95,45% para a faixa $\mu \pm 2 \times \sigma$
  - 0,9973 ou 99,73% para a faixa $\mu \pm 3 \times \sigma$

Roteiro

Distribuição normal padrão

- Damos o nome de distribuição normal padrão (*standard normal distribution*) à distribuição normal com média $\mu = 0$ e desvio-padrão $\sigma = 1$.
- Escrevemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para denotar que uma variável aleatória X tem distribuição normal de média μ e variância σ^2.
- Em particular, se uma variável aleatória Z tem distribuição normal padrão, então usamos $Z \sim N(0, 1)$.

Distribuição normal padrão

Exemplo 01 (Montgomery, pp. 112): Seja $Z \sim N(0,1)$. Calcule

a) $\Pr(Z < -0{,}86)$
b) $\Pr(Z > 1{,}26)$
c) $\Pr(Z > -1{,}37)$
d) $\Pr(-1{,}25 < Z < 0{,}37)$
e) $\Pr(Z < -4{,}6)$

Distribuição normal padrão

Resposta - Exemplo 01:

a) $\Pr(Z < -0{,}86) = 0{,}1949$.

b) $\Pr(Z > 1{,}26) = 1 - \Pr(Z \leq 1{,}26) = 1 - 0{,}8962 = 0{,}1038$.

c) $\Pr(Z > -1{,}37) = \Pr(Z < 1{,}37) = 0{,}9147$.

d) $\Pr(-1{,}25 < Z < 0{,}37) = \Pr(Z < 0.37) - \Pr(Z < -1.25) = 0{,}6443 - 0{,}1056 = 0{,}5387$.

e) O menor valor da v.a. normal padrão Z encontrado na tabela de probabilidades é $-3{,}49$. Portanto, apenas podemos afirmar que $\Pr(Z < -4{,}6) < \Pr(Z < -3{,}49) = 0{,}0002$.

Distribuição normal padrão

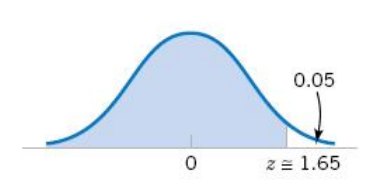
Exemplo 02:

- Seja $Z \sim N(0, 1)$.
- Encontre o valor z tal que $\Pr(Z > z) = 0{,}05$.

Distribuição normal padrão

Resposta (Exemplo 02):

- Esse problema pode ser reformulado para determinar o valor z tal que $\Pr(Z \leq z) = 0{,}95$.
- Agora a tabela de probabilidades é usada ao contrário: procuramos até encontrar o valor que corresponde a 0,95.
- Resposta: $z = 1{,}65$.



Distribuição normal padrão

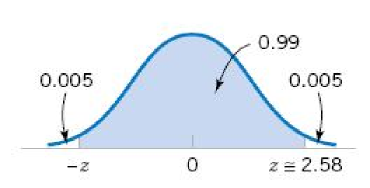
Exemplo 03:

- Seja $Z \sim N(0, 1)$.
- Encontre o valor z tal que $\Pr(-z < Z < z) = 0{,}99$.

Distribuição normal padrão

Resposta (Exemplo 03):

- Por conta da simetria da distribuição normal, se a área da região sombreada na figura for igual a 0,99, então área total de cada região não sombreada é igual a $(1 - 0{,}99)/2 = 0{,}005$.
- Logo o valor de z corresponde a uma probabilidade de 0,995 na tabela.
- A probabilidade mais próxima é 0,99506, quando $z = 2{,}58$.



Roteiro

Distribuição normal - padronização

- Seja X uma v.a. com distribuição normal genérica, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

  é também um variável aleatória e possui distribuição normal padrão, isto é, $Z \sim N(0, 1)$
- Isso significa que, a partir de valores tabelados da distribuição normal padrão, é possível o cálculo de probabilidades para quaisquer valores dos parâmetros μ e σ^2 (i.e., para qualquer outra v.a. normal).

Distribuição normal - padronização

Esta padronização é conveniente, já que permite o cálculo da função de densidade e da função acumulada de uma distribuição normal qualquer, uma vez que temos acesso aos valores da função de densidade e da função acumulada da distribuição normal padrão. Essas funções são relacionadas da seguinte forma

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\,\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Distribuição normal - padronização

Exemplo 04: as alturas dos alunos de determinada escola são normalmente distribuídas com média 1,6m e desvio padrão 0,30m.

1) Encontre a probabilidade de um aluno medir:
    a) entre 1,50m e 1,80m
    b) mais de 1,75m
    c) menos de 1,48m
2) Qual deve ser a altura mínima para 10% dos mais altos?

Distribuição normal - padronização

Resposta - exemplo 04: Primeiro, note que

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{1{,}50 - 1{,}60}{0{,}3} = -0{,}33$$

e que

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{1{,}80 - 1{,}60}{0{,}3} = 0{,}67.$$

Então

$$\begin{aligned}
\Pr(x_1 < X < x_2) = \Pr(z_1 < Z < z_2) = \\
\Pr(-0{,}33 < Z < 0{,}67) = \Pr(Z < 0{,}67) - \Pr(Z < -0{,}33) = \\
0{,}7486 - 0{,}3707 = \\
0{,}3779 = 37{,}79\%.
\end{aligned}$$

Roteiro

Distribuição normal bivariada