Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidades

Prof. Eduardo Bezerra

CEFET/RJ

23 de fevereiro de 2018

Roteiro

Roteiro

Variável aleatória

- É comum resumir o resultado de um experimento aleatório por um **número**.
- Desse modo, podemos definir uma **variável** que assume diversos valores numéricos, um para cada resultado possível de um experimento aleatório.
- Posto que o resultado de um experimento aleatório não é conhecido a priori, essa variável é denominada variável aleatória.

Variável aleatória

Variável aleatória

Uma variável aleatória é uma função que associa um número real a todo resultado (evento simples) do espaço amostral de um experimento aleatório. Uma variável aleatória é denotada por uma letra maiúscula, como X. Cada valor de X é denotado por x.

Variável aleatória - exemplo 1

No espaço amostral relativo ao "lançamento simultâneo de duas moedas", temos S={(k,k), (k,c), (c,k), (c,c)}, onde c = coroa e k = cara. Poder-se-ia definir as seguintes variáveis aleatórias:

- X é igual ao número de caras.
- Y é igual a 3 para cada cara mais 2 para cada coroa.
- $Z = 2X$ (ou seja, Z é uma transformação de outra variável aleatória).

Qual é a faixa de valores possíveis que cada uma das variáveis aleatórias acima pode assumir?

Variável aleatória - exemplo 2

Considere novamente o experimento aleatório correspondente ao lançamento de duas moedas.

- Então S = {(k,k),(k,c),(c,k),(c,c)}.
- Se definimos uma variável aleatória X como o número de caras observadas, vemos que o valor de X depende do resultado do experimento.
- De fato, o conjunto dos possíveis valores de X é $\{0, 1, 2\}$.
- $\Pr(X = 0) = 1/4$, $\Pr(X = 1) = 1/2$ e $\Pr(X = 2) = 1/4$.
- Note também que $\sum_{x_i} \Pr(X = x_i) = 1$

Variável aleatória - exemplo 3

- Ao descrever uma peça manufaturada, podemos empregar as categorias "defeituosa" e "não-defeituosa".
- Todavia, podemos atribuir um número a cada resultado não-numérico do experimento, da seguinte forma:
  - ao evento "peça não-defeituosa", atribuir o valor 1;
  - ao evento ''peça defeituosa", atribuir o valor 0.
- Nesse caso, X pode assumir valores em $\{0, 1\}$.

Variável aleatória - exemplo 4

Suponha que no lançamento de uma moeda, a probabilidade de dar cara é p. Suponha que essa moeda seja lançada sucessivas vezes. Considere que esses lançamentos sucessivos sejam independentes. Então, se a variável X é definida como o número de lançamentos até a primeira cara, então:

- $\Pr(X = 1) = \Pr(\{k\}) = p$
- $\Pr(X = 2) = \Pr(\{c, k\}) = (1 - p)p$
- $\Pr(X = 3) = \Pr(\{c, c, k\}) = (1 - p)^2 p$
- $\ldots$
- $\Pr(X = n) = \Pr(\{c, c, \ldots, k\}) = (1 - p)^{n-1} p$

Espaços amostrais discretos e contínuos

Espaço amostral discreto

Se um espaço amostral S contém um número finito de elementos, ou se for composto por um conjunto infinito, mas enumerável, então S é dito um espaço amostral discreto.

Espaço amostral contínuo

Se um espaço amostral S contém um número de elementos igual à quantidade de pontos em um segmento de reta, diz-se que S é um espaço amostral contínuo.

Nota: um conjunto é enumerável quando é finito, ou quando todos os seus elementos podem ser colocados em correspondência um-a-um com o conjunto dos números inteiros $\mathcal{Z}$.

Variável aleatória

Variável aleatória discreta

X é uma **variável aleatória discreta** se sua imagem (i.e., o conjunto de valores que ela pode assumir) for um conjunto finito, ou um conjunto infinito enumerável.

Variável aleatória contínua

X é uma **variável aleatória contínua** se pode assumir valores em uma escala contínua.

Variável aleatória discreta - exemplo 1

Considere o experimento de jogar um dado. As variáveis aleatórias a seguir são discretas.

- Se X for definida como o ponto obtido no dado, então $\text{Im}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Se X for definida como

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o ponto for igual a 6,} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

então $\text{Im}(X) = \{0, 1\}$

Variável aleatória discreta - exemplo 2

Considere o experimento de jogar 5 moedas (ou uma mesma moeda 5 vezes).

- Se X for definida como o número de caras em 5 lances, então $\text{Im}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Variável aleatória discreta - exemplo 3

Considere o experimento de jogar uma moeda até tirar uma cara.

- Se X for definida como o número de jogadas até tirar uma cara (incluindo-se a cara), então $\text{Im}(X) = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Se X for definida como o número de coroas até tirar uma cara, então $\text{Im}(X) = \{0, 1, 2 \ldots\}$.

De forma geral, variáveis aleatórias discretas são usadas para representar dados obtidos por *contagem*.

Variável aleatória contínua - exemplo

As seguintes variáveis aleatórias são contínuas:

- X é definida como o valor do balanço (i.e., receita - despesa) de uma empresa (em reais).
- X é definida como o valor da temperatura corporal de um paciente.

De forma geral, variáveis aleatórias contínuas são usadas para representar dados *medidos* (alturas, pesos, correntes elétricas, voltagens, pressões, instantes de tempo, distâncias, temperaturas).

Roteiro

1. Variáveis aleatórias
2. Distribuições de probabilidades discretas

Função de probabilidade

- A função de probabilidade de uma variável aleatória X é uma descrição das probabilidades associadas com os valores possíveis de X.
- Para uma **variável aleatória discreta**, a distribuição é frequentemente especificada por uma lista de valores possíveis, juntamente com a probabilidade de cada um.
- Em alguns casos, é adequado expressar a probalidade de cada valor por uma fórmula:

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i)$$

onde x_i é algum valor da variável aleatória X e $\Pr(X = x_i)$ é a probabilidade de X assumir o valor x_i.

Função de probabilidade

Função de probabilidade

O conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ é a função de probabilidade da variável discreta X, se, para cada resultado possível x:

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_x f(x) = 1$,
3. $\Pr(X = x) = f(x)$.

Nomes alternativos:

- função de massa de probabilidade
- distribuição de probabilidade

Função de probabilidade - exemplo 1

Considere o espaço amostral S relativo ao experimento “lançar, de modo simultâneo, duas moedas”.

- Temos S=$\{$(k,k), (k,c), (c,k), (c,c)$\}$, onde c = coroa e k = cara.
- Para a v.a. discreta X igual ao “número de caras”, a função de probabilidade é $\{(0, 1/4), (1, 1/2), (2, 1/4)\}$.

Função de probabilidade - exemplo 2

Em um lote de 8 equipamentos, há 3 defeituosos. Se um cliente compra de forma aleatória 2 desses equipamentos, determine a função de distribuição de probabilidades $f(x)$ para a v.a. discreta X que representa o número de equipamentos defeituosos comprados.

- Note que $X \in \{0, 1, 2\}$
- $f(0) = \Pr(X = 0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$
- $f(1) = \Pr(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$
- $f(2) = \Pr(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

Qual a fórmula geral para $f(x)$?

Função de distribuição - exercício

Determine as funções de probabilidade das seguintes variáveis aleatórias discretas.

a) $X = \{\text{resultado do lançamento de um dado não viciado}\}$
b) $Y = X + X$ (i.e., Y é igual à soma das faces dos dois dados lançados.)
c) $Z = \max\{(X_1, X_2)\}$, onde X_1 e X_2 são os pontos obtidos em cada um dos dois dados.

Observação: os dois últimos exemplos nos permitem concluir que toda função de uma variável aleatória é também uma variável aleatória.