Teoria das Probabilidades

Prof. Eduardo Bezerra

(CEFET/RJ)

23 de fevereiro de 2018

Roteiro

Roteiro

Experimento aleatório e espaço amostral

Experimento aleatório

Experimento no qual podemos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis, mas não podemos dizer, a priori, qual desses resultados vai acontecer.

Espaço amostral (S)

Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Espaço amostral - exemplo 01

Considere o experimento correspondente a jogar um dado e observar sua face voltada para cima.

- Se estivermos interessados no número que aparece nessa face, o espaço amostral será:

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- Se estivermos interessados em saber se o resultado será par ou ímpar, o espaço amostral será:

$$S_2 = \{\text{par}, \text{ímpar}\}$$

Espaço amostral - exemplo 02

Um experimento consiste dos três passos seguintes:

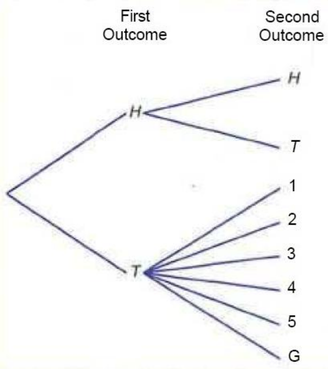
1. Jogar uma moeda.
2. Se der cara no passo 1, então a moeda é jogada uma segunda vez.
3. Se der coroa no passo 1, então um dado é jogado uma vez.

O conjunto S correspondente ao espaço amostral é:

$$S = \{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$$

Eventos - exemplo 02 (cont.)

Abaixo é apresentado um **diagrama de árvore** para determinação dos pontos amostrais do espaço amostral deste exemplo.



Eventos - exemplo 03

Espaços amostrais com uma quantidade de elementos muito grade ou infinita são melhor descritos através de uma regra. Seguem dois exemplos.

- Os possíveis resultados de um experimento aleatório são as cidades com mais de um milhão de habitantes, então esse espaço amostral pode ser descrito como:

$$S = \{x \,|\, \text{x é uma cidade com população maior que 1 milhão.}\}$$

- Lâmpadas são fabricadas e testadas até que queimem. Os instates de ocorrência destes eventos são registrados. O espaço amostral é:

$$S = \{x \,|\, x \geq 0\}$$

Eventos

Evento

Um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

Evento simples (ou ponto amostral)

Um evento simples é aquele constituído de apenas um elemento do espaço amostral.

Eventos - exemplo 01

Considere o experimento aleatório de selecionar aleatoriamente uma carta em um baralho de 52 cartas. O espaço amostral tem 52 eventos simples. Exemplos de eventos neste experimento são:

- O próprio espaço amostral, que corresponde ao evento *uma carta qualquer é selecionada*.
- Subconjuntos próprios do espaço amostral, que contêm múltiplos elementos. Um caso particular é o conjunto vazio, um evento definido como tendo probabilidade 0.

Eventos - exemplo 01 (cont.)

Exemplos de eventos correspondentes a subconjuntos próprios do espaço amostral são:

- *Carta é vermelha e preta ao mesmo tempo* (0 elementos),
- *Carta é o 5 de Copas* (1 elemento),
- *Carta é o um Rei* (4 elementos),
- *Carta é uma Figura* (12 elementos),
- *Carta é de Espadas* (13 elementos),
- *Carta é uma Figura ou de cor vermelha* (32 elementos),

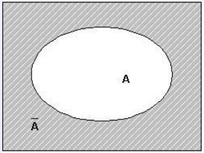
Eventos - exemplo 02

Considere o experimento de jogar um dado não viciado e visualizar sua face voltada para cima. O espaço amostral correspondente é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Exemplos de eventos com relação esse espaço amostral:

- resultado é um número par $= \{2, 4, 6\}$
- resultado é um número ímpar $= \{1, 3, 5\}$
- resultado é um número par **e** ímpar $= \emptyset$
- resultado é um número par maior do que 2 $= \{4, 6\}$.

Evento complementar

Dado um evento A, seu evento complementar com relação a um espaço amostral S é o subconjunto de todos os elementos de S que não estão em A. Denotamos o evento complementar por A', A^c ou $\overline{A}$.



Um evento e seu complementar são mutuamente exclusivos e exaustivos.

União de eventos

A união de dois eventos A e B com relação a S é o subconjunto de todos os elementos de S que estão em A apenas, ou então em B apenas, ou então em ambos, A e B. Denota-se esse conjunto por $A \cup B$.

Interseção de eventos

A interseção de dois eventos A e B com relação a S é o subconjunto de todos os elementos de S que estão em ambos os eventos, A e B. Denota-se esse conjunto por $A \cap B$.

Roteiro

Probabilidade

Usamos o conceito de frequência relativa para definir probabilidades. Seja A um evento qualquer de um espaço amostral. Se os eventos simples componentes de A são equiprováveis, então podemos calcular a probabilidade de A acontecer, denotada por $\Pr(A)$, como:

$$\Pr(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis à ocorrência do evento A}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

ou

$$\Pr(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

onde $n(A)$ e $n(S)$ são as cardinalidades de A e S, respectivamente.

Probabilidade - exemplo

No lançamento de um dado não viciado, os eventos simples são equiprováveis com probabilidade $1/6$.

- $\Pr(\text{sair um número par}) = 3/6 = 1/2$
- $\Pr(\text{sair os números 1 ou 3}) = 2/6 = 1/3$
- $\Pr(\text{sair um número maior do que 2}) = 4/6 = 2/3$

Os exemplos acima nos permitem concluir que, para um espaço amostral discreto, a probabilidade de um evento E é igual à soma das probabilidades dos elementos de E.

Probabilidades da união e da interseção de eventos

Já que eventos são conjuntos, dados dois eventos A e B, podemos querer calcular as probabilidades dos eventos $A \cup B$ e $A \cap B$.

- $\Pr(A \cup B)$ corresponde à probabilidade de A *ou* B acontecerem.
- $\Pr(A \cap B)$ é chamada de probabilidade conjunta de A e B, e corresponde à probabilidade de A e B acontecerem simultaneamente.

Eventos mutuamente exclusivos

Eventos mutuamente exclusivos

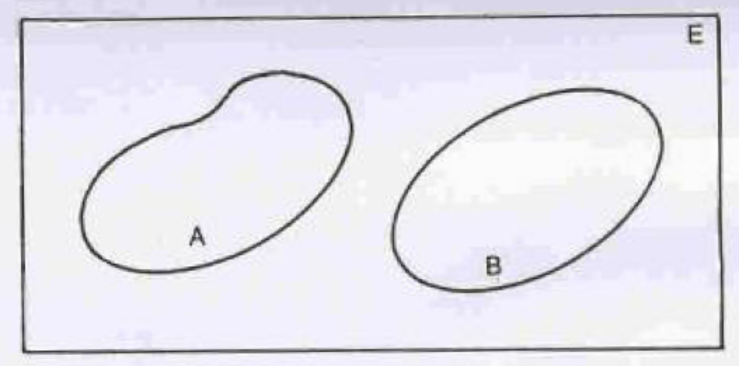
Eventos A e B são `mutuamente exclusivos` (ou `disjuntos`) se ocorrência de um elimina a possibilidade de ocorrência do outro. Neste caso a probabilidade de ocorrência de A ou B é expressa por:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Note que, para eventos mutuamente exclusivos A e B, é verdade que $A \cap B = \emptyset$.

Eventos mutuamente exclusivos

Figura: A e B são mutuamente exclusivos.



Eventos mutuamente exclusivos - exemplo

Suponha que A e B sejam eventos mutuamente exclusivos, e que $\Pr(A) = 0{,}20$ e $\Pr(B) = 0{,}30$. Então:

i) $\Pr(A^c) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$
ii) $\Pr(B^c) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$
iii) $\Pr(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}50$ (pois A e B são mutuamente exclusivos)
iv) $\Pr(A \cap B) = 0$ (pois A e B são mutuamente exclusivos)
v) $\Pr(A^c \cap B^c) = \Pr((A \cup B)^c) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - (\Pr(A) + \Pr(B)) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ (usando as leis de DeMorgan e o fato de A e B serem mutuamente exclusivos)

Eventos mutuamente exclusivos - exercício

a) Em uma jogada de uma moeda ideal, qual a probabilidade de o resultado ser "cara" ou "coroa"?

b) Em uma jogada de um dado ideal, qual a probabilidade de o resultado ser 2 ou 4?

Axiomas de probabilidades

Axiomas de probabilidades

Se S for um espaço amostral de um experimento aleatório, então:

(1) $\Pr(S) = 1$;

(2) $0 \leq \Pr(E) \leq 1$, onde E é qualquer evento de S.

(3) Para dois eventos quaisquer A e B, com $A \cap B = \emptyset$ (isto é, A e B são *mutuamente exclusivos*), $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

Axiomas de probabilidades

Dos axiomas anteriores, podemos deduzir a regra da soma: para quaisquer dois eventos A e B de um espaço amostral, a probabilidade do evento união de A e B é:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Podemos também deduzir o princípio da inclusão-exclusão: a probabilidade de um evento E não acontecer é igual a 1 menos a probabilidade de E aconteter.

$$\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$$

Axiomas de probabilidades - exemplo

- Considere o experimento aleatório de lançamento de um dado não viciado: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Nesse experimento, temos que $\Pr(\{1\}) = \Pr(\{2\}) = \Pr(\{3\}) = \Pr(\{4\}) = \Pr(\{5\}) = \Pr(\{6\}) = 1/6$.
- A probabilidade de ser obter um número par é $\Pr(\{2,4,6\}) = \Pr(\{2\}) + \Pr(\{4\}) + \Pr(\{6\}) = 1/2$.

Axiomas de probabilidades - exercício

Considere o experimento aleatório de lançamento de um dado não viciado. Calcule as seguintes probabilidades:

a) Pr(sair um número par)
b) Pr(sair um número ímpar)
c) Pr(sair um número par ou o número 3)
d) Pr(sair um número ímpar ou o número 3)
e) Pr(sair o número 1 ou o número 3)
f) Pr(sair um número maior do que 2)
g) Pr(não sair um número menor do que 2)
h) Pr(sair um número par **e** maior que 2)

Axiomas de probabilidades - exercício

Considere que um experimento aleatório corresponde ao lançamento de duas moedas. Suponha que os 4 pontos do espaço amostral estejam no conjunto S $= \{$(k,k),(k,c),(c,k),(c,c)$\}$, onde k indica cara e c indica coroa.

a) Descreva A, o evento ''Face da primeira moeda é coroa.''
b) Descreva B, o evento ''Face da segunda moeda é coroa.''
c) Determine $\Pr(A \cup B)$.

Axiomas de probabilidades - exercício

a) Deduza a expressão da regra da soma para dois eventos: $\Pr(A \cup B)$.
b) Deduza a expressão da regra da soma para três eventos: $\Pr(A \cup B \cup C)$.
c) Deduza a expressão do princípio da inclusão-exclusão: $\Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$.

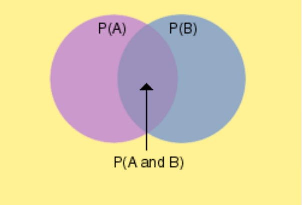
Roteiro

Probabilidade condicional

- A probabilidade de um evento pode mudar após sabermos que outro evento ocorreu.
- A noção de probabilidade condicional está relacionada ao fato da ocorrência de um evento *afetar* (no sentido de aumentar ou diminuir) a probabilidade de ocorrência de outro evento.

Probabilidade condicional

A figura abaixo apresenta o diagram de Venn para os eventos A e B. Quais as duas seções desse diagrama que devem ser consideradas para o cálculo de $\Pr(A|B)$? E de $\Pr(B|A)$?



Conclusão: uma probabilidade condicional é então uma probabilidade calculada não mais com relação ao espaço amostral S, mas sim a partir de um subconjunto de S.

Probabilidade condicional - exemplo

- Considere que um grupo de 100 pessoas inclui 40 com diploma de curso superior, 20 microempresários e 10 que são, ao mesmo tempo, portadores de diploma do curso superior e microempresários.
- Sejam os eventos:
  - A $=$ {pessoa tem diploma de curso superior}
  - B $=$ {pessoa é um microempresário}
- Então: $Pr(A) = 0{,}40$, $Pr(B) = 0{,}20$ e $Pr(A \cap B) = 0{,}10$.

Probabilidade condicional - exemplo

- Agora suponha o evento: "a pessoa é microempresária, sabendo-se que ela tem diploma de curso superior".
- A probabilidade deste evento deve ser diferente da probabilidade da pessoa ser microempresária, porque agora o espaço amostral não consiste nas 100 pessoas, mas apenas naquelas que possuem diploma de curso superior.
- De fato, a probabilidade condicional de que uma pessoa seja microempresária sabendo-se que ela tem diploma de curso superior é 0,25, i.e., valor diferente de 0,20.

Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional de um evento A, dado um evento B, denotada por $P(A|B)$, é

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

para $\Pr(B) > 0$

$\Pr(A|B)$ é então a probabilidade de A acontecer, dado que B aconteceu. A ocorrência de B é a única informação conhecida.

Probabilidade condicional - exercício

Calcule as probabilidades condicionais para os seguintes eventos, no experimento de jogada de um dado não viciado:

a) o resultado ser 6, dado que o resultado foi um número par.
b) o resultado ser 5, dado que o resultado foi um número ímpar.
c) o resultado ser 5 ou 6, dado que o resultado foi um número maior que 4.
d) o resultado ser 1, dado que o resultado foi um número no conjunto $\{1,2,3\}$.

Probabilidade condicional - exemplo

No experimento de jogada de um dado não viciado, considere os eventos

- A: o resultado é ímpar.
- B: no mínimo são obtidos três pontos.

Para o cálculo de $\Pr(A|B)$, deve-se considerar todos os resultados favoráveis a A dentre os resultados de B.

- $A = \{1,3,5\}$
- $B = \{3,4,5,6\}$

Logo, $\Pr(A|B) = 2/4 = 1/2$

Probabilidade condicional - exemplo (cont.)

Outro modo de resolver:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{2/6}{4/6} = 2/4$$

Podemos ainda obter $\Pr(B|A)$:

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{2/6}{3/6} = 2/3$$

Probabilidade condicional - exercício

- Uma caixa contém R bolas vermelhas e B bolas azuis.
- São retiradas 2 bolas da caixa sem repô-las.
- Qual a probabilidade de a primeira bola ser vermelha e de a segunda ser azul?

Probabilidade condicional - exercício

Usando um baralho comum com 52 cartas, qual a probabilidade de que a primeira e a segunda cartas selecionadas sem reposição são ases?

Probabilidade condicional - exercício

Numa certa cidade 40% das pessoas são homens e 60% mulheres. Também, 50% dos homens e 30% das mulheres fumam. Ache a probabilidade de que uma pessoa seja homem, dado que esta pessoa é fumante.

Roteiro

Eventos independentes

Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes se qualquer uma das três condições a seguir for verdadeira.

(1) $\Pr(B|A) = \Pr(B)$

(2) $\Pr(A|B) = \Pr(A)$

(3) $\Pr(B \cap A) = \Pr(A) \times \Pr(B)$

Eventos independentes - exemplo

Seja S = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o espaço amostral do lançamento de um dado ideal. Consideram-se os eventos:

- resultado 3, 4 ou 6: A = $\{3, 4, 6\}$. Portanto, $\Pr(A) = 1/2$.
- resultado par: B = $\{2, 4, 6\}$. Portanto, $\Pr(B) = 1/2$.

$A \cap B = \{4, 6\}$, $\Pr(A \cap B) = 2/6 = 1/3$, $\Pr(A) \times \Pr(B) = 1/4$. Portanto, já que $\Pr(A \cap B) \neq \Pr(A) \times \Pr(B)$, os eventos A e B **não** são independentes.

Eventos independentes - exercício

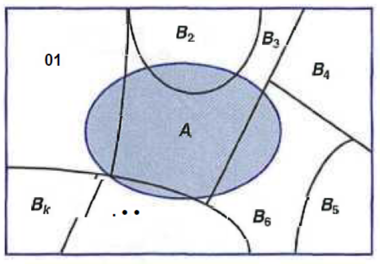
São jogadas duas moedas não viciadas.

- Qual é a probabilidade de saírem duas caras?
- Qual é a probabilidade de sair uma cara em uma moeda, dado que resultou uma coroa na outra?

Partição do Espaço Amostral

Os eventos B_1, B_2, ..., B_k formam uma partição do espaço amostral S se:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$
2. $\bigcup_i B_i = S$
3. $\Pr(B_i) > 0$, para todo i



Teorema da Probabilidade Total

Se B_i, $1 \leq i \leq n$, é uma partição do espaço amostral então, para qualquer evento A no mesmo espaço amostral:

$$\Pr(A) = \sum_i \Pr(A \cap B_i)$$

ou, alternativamente,

$$\Pr(A) = \sum_i \Pr(A \mid B_i) \Pr(B_i)$$

Roteiro

Regra de Bayes

Dados dois eventos quaisquer A e B, temos que

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

e

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

Desde que $A \cap B = B \cap A$, podemos isolar o termo $\Pr(A \cap B)$ e igualar as expressões, o que resulta em:

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B) \times \Pr(B)}{\Pr(A)}$$

Regra de Bayes

A Regra de Bayes é a relação anterior aplicada a uma seqüência de n eventos mutuamente exclusivos $B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n$ no lugar de um único evento B:

$$\Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(A|B_i)\Pr(B_i)}{\Pr(B_1)\Pr(A|B_1) + \ldots + \Pr(B_n)\Pr(A|B_n)}$$

Regra de Bayes - exemplo

- Um teste para uma determinada doença rara é positivo com probabilidade 0,95 se a pessoa tem a doença.
- O mesmo teste é negativo com probabilidade 0,95 se a pessoa não tem a doença.
- Uma pessoa selecionada de uma certa populacão tem probabilidade 0,001 de ter a doença.
- Dado que o teste aplicado a uma pessoa deu positivo, qual a probabilidade de essa pessoa ter a doença efetivamente?

Regra de Bayes - exemplo (cont.)

Seja A o evento "pessoa tem a doença" e B o evento "o teste é positivo". Deseja-se determinar $\Pr(A|B)$. Pela Regra de Bayes, temos:

$$\begin{aligned}
\Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A)\Pr(B|A)}{\Pr(B)} \\
&= \frac{\Pr(A)\Pr(B|A)}{\Pr(A)\Pr(B|A) + \Pr(A^c)\Pr(B|A^c)} \\
&= \frac{0{,}001 \times 0{,}95}{0{,}001 \times 0{,}95 + 0{,}999 \times 0{,}05} \approx 0{,}02
\end{aligned}$$

Conclusão: Embora o teste seja relativamente preciso, é pouco provável que uma pessoa cujo teste seja positivo tenha a doença.

Regra de Bayes - exercício 01

Um médico sabe que a meningite causa torcicolo em 50% dos casos. Porém, o médico também conhece algumas probabilidades incondicionais que dizem que

1. um caso de meningite atinge $1/50000$ das pessoas da população e
2. a probabilidade de alguém ter torcicolo é de $1/20$.

Qual a probabiliade de que um paciente que esteja com torcicolo tenha meningite?

Regra de Bayes - exercício 02

Suponha que no meio da noite dispare o alarme contra ladrões de uma casa. Suponha também que há 95% de chances de que o alarme dispare quando uma tentativa de roubo ocorre, que em 1% das vezes o alarme dispara por outros motivos, e que no bairro existe uma chance de 1 em 10.000 de uma dada casa ser roubada em um dado dia. Quais são as chances de que esteja havendo uma tentativa de roubo?