Intervalos de Confiança - Amostras Grandes

Prof. Eduardo Bezerra

CEFET/RJ

11 de Abril de 2018

Roteiro

1. Intervalo de confiança para médias

2. Intervalo de confiança para proporções

Roteiro

1. Intervalo de confiança para médias

2. Intervalo de confiança para proporções

Intervalo de confiança para médias

Vamos estudar um procedimento para calcular intervalos de confiança para a média amostral $\overline{X}$.

Intervalo de confiança para médias

Vamos estudar um procedimento para calcular intervalos de confiança para a média amostral $\overline{X}$.

Aqui, consideramos que o tamanho da amostra é *grande* (i.e., $n > 30$).

Intervalo de confiança para médias

Vamos estudar um procedimento para calcular intervalos de confiança para a média amostral $\overline{X}$.

Aqui, consideramos que o tamanho da amostra é *grande* (i.e., $n > 30$).

Nesse caso, podemos utilizar o TLC.

Intervalo de confiança para médias

Considere uma amostra de 100 alturas retirada a partir de alunos de uma universidade.

- São calculados a média e o desvio padrão dessa amostra: $\bar{x} = 1,58$ e $s = 0,2$.
- O valor $\bar{x} = 1,58$ é uma estimativa pontual de μ.
- Para ter uma ideia do quanto μ difere de $1,58$, construímos um intervalo de confiança (em torno de $1,58$), que *provavelmente* contenha μ.

Intervalo de confiança para médias

Para construir esse intervalo de confiança, considere que

a) a distribuição da população tem média μ e variância σ^2;

b) os valores de μ e σ são desconhecidos;

c) $(X_1, X_2, \ldots, X_{100})$ são as 100 alturas amostradas.

Visto que $\overline{X}$ é a média de uma *amostra grande*, o TLC nos diz que esse valor vem de uma distribuição normal:

Intervalo de confiança para médias

Para construir esse intervalo de confiança, considere que

a) a distribuição da população tem média μ e variância σ^2;

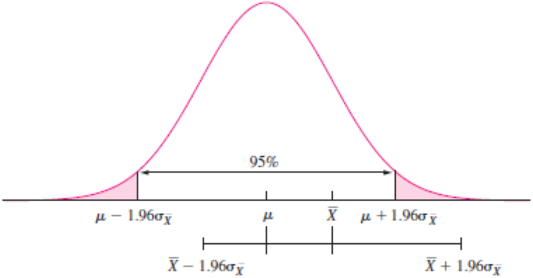
b) os valores de μ e σ são desconhecidos;

c) $(X_1, X_2, \ldots, X_{100})$ são as 100 alturas amostradas.

Visto que $\overline{X}$ é a média de uma *amostra grande*, o TLC nos diz que esse valor vem de uma distribuição normal:

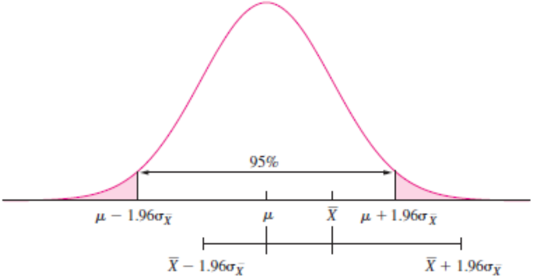
$$\overline{X} \sim N(1,58; \frac{(0,2)^2}{100})$$

Intervalo de confiança para médias



A figura apresenta a distribuição (normal) da v.a. $\overline{X}$. Apresenta também um cenário possível em que a estimativa pontual $\overline{X}$ é maior do que μ.

Intervalo de confiança para médias



A figura apresenta a distribuição (normal) da v.a. $\overline{X}$. Apresenta também um cenário possível em que a estimativa pontual $\overline{X}$ é maior do que μ.

De onde vêm os valores $1,96$ ou 95% nessa figura?!

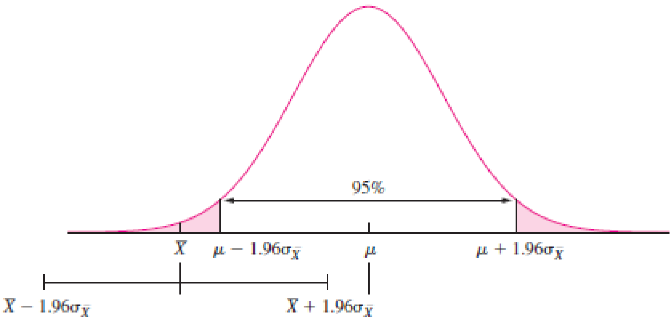
Intervalo de confiança para médias

Repare que

- para essa amostra em particular, a estimativa para $\overline{X}$ "caiu dentro" do intervalo correspondente à região que cobre 95% da área central da curva normal.
- para 95% de todas as amostras que poderiam ser colhidas da população e para as quais o intervalo correspondente fosse calculado, μ estaria contido nesse intervalo.

Portanto, dizemos que o intervalo de confiança para μ no nível de 95% é $\overline{X} \pm 1,96\sigma_{\overline{X}}$.

Intervalo de confiança para médias



Outro cenário possível de amostragem: dessa vez, a estimativa pontual $\overline{X}$ "caiu fora" do intervalo correspondente a 95% da área central.

Intervalo de confiança para médias

Repare que

- para essa amostra em particular, $\overline{X}$ “caiu fora” do intervalo correspondente à região que cobre 95% da área central da distribuição.
- 5% de todas as amostras que poderiam ser colhidas da população apresentariam esse comportamento.

Intervalo de confiança para médias

Repare que

- para essa amostra em particular, $\overline{X}$ "caiu fora" do intervalo correspondente à região que cobre 95% da área central da distribuição.
- 5% de todas as amostras que poderiam ser colhidas da população apresentariam esse comportamento.

Para as amostras não usuais (i.e., aquelas que compõem esses 5%), o intervalo de confiança não contém a média populacional μ.

Intervalo de confiança para médias

Seja calcular o intervalo de confiança no nível de 95% para a média das alturas dos 100 alunos da amostra.

- $\bar{x} = 1,58$
- O desvio padrão populacional σ e consequentemente o desvio padrão da média amostral $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{100}$ são desconhecidos.
- Entretanto, dado que $n > 30$, podemos aproximar σ pela estimativa pontual do desvio padrão da amostra: $\sigma \approx s = 0,2$.

Intervalo de confiança para médias

Seja calcular o intervalo de confiança no nível de 95% para a média das alturas dos 100 alunos da amostra.

- $\bar{x} = 1,58$
- O desvio padrão populacional σ e consequentemente o desvio padrão da média amostral $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{100}$ são desconhecidos.
- Entretanto, dado que $n > 30$, podemos aproximar σ pela estimativa pontual do desvio padrão da amostra: $\sigma \approx s = 0,2$.

Portanto, podemos calcular o intervalo de confiança da média populacional das alturas como

$$1,58 \pm (1,96)(\frac{0,2}{\sqrt{100}}) \rightarrow 1,58 \pm (1,96)(0,02) \rightarrow (1,54; 1,62)$$

Intervalo de confiança para médias

A interpretação para o intervalo obtido é a seguinte: há 95% de confiança de que a média populacional esteja acima de 1,54m e abaixo de 1,62m.

Intervalo de confiança para médias

A interpretação para o intervalo obtido é a seguinte: há 95% de confiança de que a média populacional esteja acima de 1,54m e abaixo de 1,62m.

Podemos afirmar com certeza que a média populacional esteja realmente dentro desse intervalo?

Intervalo de confiança para médias

A interpretação para o intervalo obtido é a seguinte: há 95% de confiança de que a média populacional esteja acima de 1,54m e abaixo de 1,62m.

Podemos afirmar com certeza que a média populacional esteja realmente dentro desse intervalo?

Não! Em vez disso, o que podemos afirmar é que, se repetíssemos o processo de amostragem uma grande quantidade de vezes e calculássemos o intervalo de confiança correspondente, em aproximadamente 95% dos casos, a amostra conteria a média populacional.

Intervalo de confiança para médias

Note que não há nada de especial com o valor 95% do nível de confiança usado no exemplo anterior.

- Em geral, qualquer nível de confiança pode ser usado.
- Por exemplo, se tivéssemos usado o valor 68%, teríamos obtido o intervalo de confiança (1,56; 1,60).

Repare também que o intervalo para o nível 95% é *maior* do que o intervalo para 68%.

- Esse é um resultado plausível?
- O que significa um intervalo de confiança no nível 100%?

Intervalo de confiança para médias

Podemos agora definir formalmente o termo nível de confiança.

Intervalo de confiança para médias

Podemos agora definir formalmente o termo nível de confiança.

Nível de confiança

Seja α um número tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. O nível de confiança $(1 - \alpha)$ é a probabilidade de que o intervalo construído contenha o verdadeiro valor da média populacional.

Intervalo de confiança para médias

Podemos agora definir formalmente o termo nível de confiança.

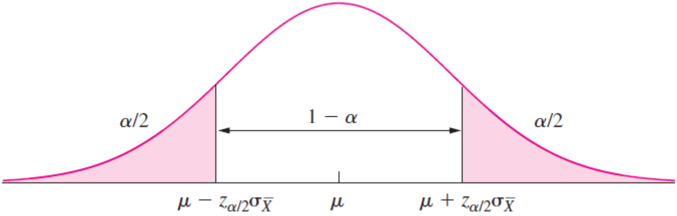
Nível de confiança

Seja α um número tal que $0 \leq \alpha \leq 1$. O nível de confiança $(1 - \alpha)$ é a probabilidade de que o intervalo construído contenha o verdadeiro valor da média populacional.

No exemplo anterior, $1 - \alpha = 0,95$ é o nível de confiança. Em geral, é um valor definido pelo projetista.

Intervalo de confiança para médias

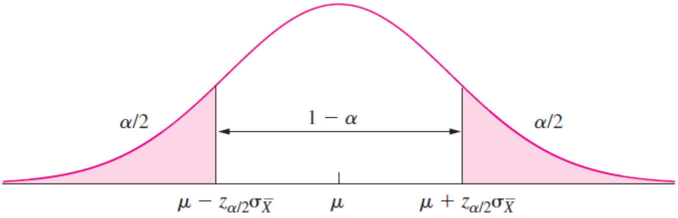
Considere que $z_{\alpha/2}$ é o escore na distribuição normal padrão que delimita uma área de $\alpha/2$ no lado direito da distribuição:



Por exemplo $z_{0,025} = 1,96$, pois 2,5% da área sob a curva normal padrão está à direita de $1,96$.

Intervalo de confiança para médias

Note que a região central da curva que possui área $(1 - \alpha)$ corresponde ao intervalo $\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$.



Em geral, para $(1 - \alpha)\%$ de todas as amostras possíveis, o intervalo $\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$ irá conter a média populacional μ.

Procedimento geral

O procedimento geral para a determinação de intervalos de confiança para $\overline{X}$, para amostras grandes, é resumido a seguir.

Procedimento geral

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n ($n > 30$) de uma população cuja média é μ e o desvio padrão é σ. Então um intervalo de confiança no nível $100(1-\alpha)\%$ para μ é

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$$

em que $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Procedimento geral

O procedimento geral para a determinação de intervalos de confiança para $\overline{X}$, para amostras grandes, é resumido a seguir.

Procedimento geral

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n ($n > 30$) de uma população cuja média é μ e o desvio padrão é σ. Então um intervalo de confiança no nível $100(1-\alpha)\%$ para μ é

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$$

em que $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.

Quando o valor de σ é desconhecido, ele pode ser substituído pelo valor de s, a estimativa pontual do desvio padrão populacional.

Exercício 01

Calculam-se a média e o desvio padrão para os pesos das caixas em uma amostra formada por 100 unidades, o que resulta em

- $\bar{x} = 12,05$,
- $s = 0,1$.

Encontre um intervalo de confiança ao nível de 85% para a média dos pesos das caixas.

Exercício 01 - solução

- O nível de confiança desejado é 85%, portanto $1 - \alpha = 0,85$, o que resulta em $\alpha = 0,15$ e $\alpha/2 = 0,075$.
- Agora, procuramos pelo valor $z_{0,075}$, i.e., o valor que delimita 7,5% da área à direita da curva. Ao fazer isso, encontramos o valor $z_{0,075} = 1,44$.
- Vamos aproximar $\sigma_{\overline{X}} \approx s/\sqrt{n} = 0,01$.
- Portanto o intervalo de confiança ao nível de 85% é $12,05 \pm (1,44)(0,01)$.
- Esse intervalo também pode ser representado como $12,05 \pm 0,0144$, ou como $(12,0356,\ 12,0644)$.

Confiabilidade x Precisão

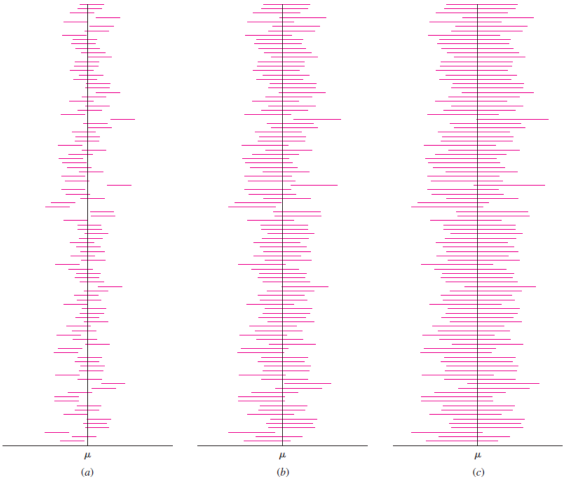
Na ilustração seguinte, cada figura apresenta 100 intervalos de confiança (cada qual para uma amostra distinta) para a média populacional no nível de:

(a) **68%**, que, embora precisos, não contêm a média da população em 32% das vezes, o que faz com que esse nível seja inaceitável para fins práticos.

(b) **95%**, o que representa um bom compromisso entre precisão e confiabilidade para muitas finalidades práticas.

(c) **99,7%**, o que significa que esses intervalos não cobrem a população em apenas três vezes em 1000. Esses intervalos são extremamente confiáveis, mas imprecisos.

Confiabilidade x Precisão



Fonte da ilustração: Navidi, pág. 329

Confiabilidade x Precisão

- O nível de confiança mais frequentemente utilizado na prática é de 95%.
- Para muitas aplicações, este nível oferece um bom compromisso entre confiabilidade e precisão.
- Níveis de confiança abaixo de 90% são raramente utilizados.
- Para algumas aplicações de controle de qualidade, nas quais a confiabilidade do produto é extremamente importante, são usados intervalos de confiança de níveis mais elevados, tais como 99,7%.

Exercício 02

Um intervalo de confiança de 90% para o diâmetro médio (em centímetros) de hastes de aço fabricadas em uma certa máquina de extrusão é calculado como (14,73, 14,91).

Exercício 02

Um intervalo de confiança de 90% para o diâmetro médio (em centímetros) de hastes de aço fabricadas em uma certa máquina de extrusão é calculado como (14,73, 14,91).

Verdadeiro ou falso: A probabilidade de que o diâmetro médio das hastes fabricadas por este processo está entre 14,73 e 14,91 é de 90%.

Exercício 02 - solução

Falso. Um intervalo de confiança *para uma amostra específica* é dado. A média ou está nesse intervalo, ou não está. Estamos 90% confiantes de que a média da população está entre 14,73 e 14,91. O termo *probabilidade* é inadequado nesse caso.

Exercício 03

No exemplo do peso de enchimento discutido anteriormente, o desvio padrão da amostra de pesos de 100 caixas foi s = 0,1 onças.

Exercício 03

No exemplo do peso de enchimento discutido anteriormente, o desvio padrão da amostra de pesos de 100 caixas foi s = 0,1 onças.

Quantas caixas devem ser amostradas para se obter um intervalo de confiança de 99% da largura $\pm$ 0,012 onças?

Exercício 03 - solução

O nível é de 99%, de modo 1 - α = 0,99. Portanto α = 0,01 e $z_{\alpha/2}$ = 2,58. o valor de s é estimado com s = 0,1. O tamanho da amostra necessária é encontrada resolvendo a equação

$$(2,58)(0,1)/\sqrt{n} = 0,012.$$

Ao resolver essa equação, obtemos $n \approx 463$.

Exercício 03 - solução

O nível é de 99%, de modo 1 - α = 0,99. Portanto α = 0,01 e $z_{\alpha/2}$ = 2,58. o valor de s é estimado com s = 0,1. O tamanho da amostra necessária é encontrada resolvendo a equação

$$(2,58)(0,1)/\sqrt{n} = 0,012.$$

Ao resolver essa equação, obtemos $n \approx 463$.

Situação geral

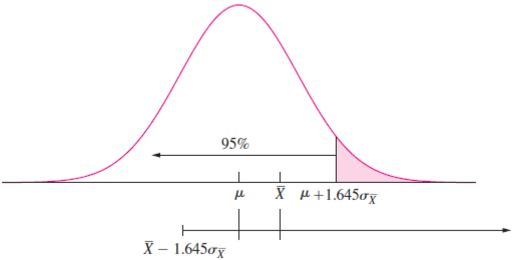
Se o nível de confiança $100(1-\alpha)\%$ é especificado, podemos procurar pelo valor $z_{\alpha/2}$ na tabela para $N(0,1)$. Se o desvio padrão da população σ também é especificado, então podemos calcular o valor de n necessário para produzir uma largura especificada.

Intervalos de confiança unilaterais

- Os intervalos de confiança discutidos até agora foram *bilaterais*, posto que especificam dois limites de confiança, superior e outro inferior. Ocasionalmente, estamos interessados em apenas um destes limites.
- Por exemplo, suponha que um engenheiro quer estimar a média de força de esmagamento de um tipo de bloco de concreto.
- O engenheiro estará provavelmente interessado em apenas um **limite inferior** para a força, uma vez que as especificações para várias aplicações irão geralmente especificar apenas uma resistência mínima.
- Nestes casos, os intervalos de confiança unilaterais são adequados.

Intervalos de confiança unilaterais

A média amostral $\overline{X}$ é extraída de uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ. Para essa amostra, $\overline{X}$ vem da área 95% inferior da distribuição, de modo que o intervalo de confiança unilateral de 95% $(\overline{X} - 1,645\sigma_{\overline{X}}, \infty)$ contém a média populacional μ.



Procedimento geral

O procedimento geral para a determinação de intervalos unilaterais de confiança para $\overline{X}$, para amostras grandes, é resumido a seguir.

Procedimento geral

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n ($n > 30$) de uma população cuja média é μ e o desvio padrão é σ. Então o limite de confiança inferior no nível $100(1-\alpha)\%$ para μ é

$$\overline{X} - z_\alpha \sigma_{\overline{X}}$$

e o limite de confiança superior no nível $100(1-\alpha)\%$ para μ é

$$\overline{X} + z_\alpha \sigma_{\overline{X}}$$

em que $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$. Quando σ é desconhecido, ele pode ser substituído pelo valor de s, a estimativa pontual do desvio padrão.

Exercício 05

Em uma amostra de 50 microfuradeiras, o tempo de vida útil médio (expresso como o número de orifícios perfurados antes da primeira falha) foi 12,68 com um desvio padrão de 6,83. Determine

a) um limite de confiança inferior de 95% para o tempo de vida útil média das microfuradeiras;

b) um limite de confiança superior de 99% para o tempo de vida útil média das microfuradeiras.

Exercício 05 - solução

A média e o desvio padrão da amostra são $\overline{X}$ = 12,68 e s = 6,83, respectivamente. O tamanho da amostra é n = 50. Estimamos $\sigma_{\overline{X}} \approx s/\sqrt{n}$ = 0,9659.

a) O limite de confiança inferior de 95% é $\overline{X} - 1,645\sigma_{\overline{X}}$ = 11,09.
b) O limite de confiança superior de 99% é $\overline{X} + 2,33\sigma_{\overline{X}}$ = 14,93.

Roteiro

1. Intervalo de confiança para médias
2. Intervalo de confiança para proporções

Intervalo de confiança para proporções

De forma análoga ao que foi feito para médias, há também procedimento geral para determinar intervalos de confiança para proporções.

Intervalo de confiança para proporções

De forma análoga ao que foi feito para médias, há também procedimento geral para determinar intervalos de confiança para proporções.

Regra prática: o procedimento a seguir deve ser usado apenas quando a amostra contém pelo menos 10 sucessos e 10 falhas.

Intervalo de confiança para proporções

Seja X a variável aleatória que conta a quantidade de sucessos em uma amostra de tamanho n. Sendo assim, $X \sim Bin(n, p)$, e a estimativa para p (proporção populacional) é $\hat{p} = X/n$.

Intervalo de confiança para proporções

Seja X a variável aleatória que conta a quantidade de sucessos em uma amostra de tamanho n. Sendo assim, $X \sim Bin(n,p)$, e a estimativa para p (proporção populacional) é $\hat{p} = X/n$.

O desvio padrão da variável $\hat{p}$ é $\sqrt{p(1-p)/n}$.

Intervalo de confiança para proporções

Seja X a variável aleatória que conta a quantidade de sucessos em uma amostra de tamanho n. Sendo assim, $X \sim Bin(n, p)$, e a estimativa para p (proporção populacional) é $\hat{p} = X/n$.

O desvio padrão da variável $\hat{p}$ é $\sqrt{p(1-p)/n}$.

Considerando que o tamanho da amostra é grande, pelo TLC, temos que:

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Intervalo de confiança para proporções

Se considerarmos o nível de confiança de 95%, então a proporção populacional satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\hat{p} - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Intervalo de confiança para proporções

Se considerarmos o nível de confiança de 95%, então a proporção populacional satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\hat{p} - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Para obter o intervalo de confiança, a abordagem tradicional recomenda substituir p por $\hat{p}$. Sendo assim, obtemos o intervalo de confiança a seguir:

$$\hat{p} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Intervalo de confiança para proporções

Procedimento geral

Seja $\widehat{p}$ a proporção de sucessos em um grande número n de ensaios independentes de Bernoulli com probabilidade de sucesso p.

Então, o intervalo de confiança no nível $100(1-\alpha)\%$ para p é

$$\widehat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$